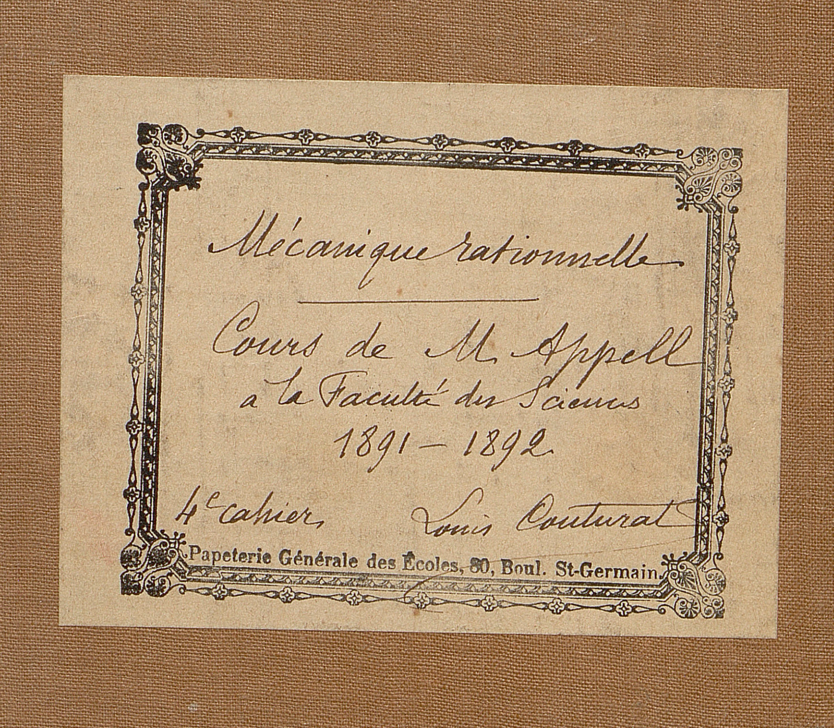

colorchecker CLASSIC
x-rite
mm


A
4.



Mécanique rationnelle
Cours de M. Appell
à la Faculté des Sciences
1891 – 1892
4e cahier
Louis Couturat
Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain

Cours de Mécanique rationnelle
professé par M. Appell
à la Faculté des sciences
1891 – 1892.
IV.



# Table

# Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe sont dues à Euler. Il faut 3 paramètres pour déterminer le mouvement, et par suite 3 équations. En effet, pour fixer la position du corps à chaque instant, il suffit de connaître la position de 3 axes invariablement liés au corps par rapport aux 3 axes fixes. Soient $Ox_1y_1z_1$ les axes fixes; on choisit pour axes mobiles entraînés par le corps ses 3 axes principaux d'inertie par rapport au point fixe O: $Oxyz$. Leur position est définie par les 9 cosinus des angles qu'ils font avec les axes fixes; mais comme ils sont liés par 6 relations, il n'y a que 3 paramètres indépendants.

| | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| $y$ | $\alpha'$ | $\beta'$ | $\gamma'$ |
| $z$ | $\alpha''$ | $\beta''$ | $\gamma''$ |

On sait (v. cinématique) que les vitesses de tous les points du corps sont à chaque instant les mêmes que s'il tournait autour d'un axe instantané $O\omega$ avec une vitesse angulaire représentée par la longueur $O\omega$; soient $p, q, r$ les projections de cette rotation instantanée $O\omega$. Un point quelconque $M$ du corps aura des coordonnées $x, y, z$ constantes dans les axes mobiles. La vitesse du point $M$ aura pour projections sur les axes mobiles:

$$V_x = qz - ry \qquad V_y = rx - pz \qquad V_z = py - qx$$

Un autre point $M'$ mobile par rapport au corps aura des coordonnées $x', y', z'$ variables avec le temps, par rapport aux axes mobiles. Sa

vitesse absolue dans ce système d'axes est égale à la somme de sa vitesse relative $\left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}\right)$ et de la vitesse d'entraînement, c.à.d. de la vitesse du point $(x', y', z')$ fixe dans le corps; elle aura donc pour projections sur les axes mobiles :

$$V'_x = \frac{dx'}{dt} + qz' - ry' \qquad V'_y = \frac{dy'}{dt} + rx' - pz' \qquad V'_z = \frac{dz'}{dt} + py' - qx'$$

Les forces extérieures qui agissent sur le corps sont les forces données $F_1, F_2, \ldots F_n$ directement appliquées, et la force de liaison OQ, réaction du point fixe. Le moment résultant de toutes ces forces extérieures par rapport au point O est le moment résultant des forces données, soit OG. Ses projections : L, M, N sur les axes mobiles sont respectivement les sommes des moments des forces données par rapport à ces axes. — Construisons d'autre part OT, moment résultant des quantités de mouvement du corps par rapport au point fixe à l'instant considéré. Le théorème des moments des quantités de mouvement exprime que la vitesse du point T est égale et parallèle au vecteur OG. C'est en écrivant que les projections de la vitesse de T sont égales à celles de OG qu'on obtient les 3 équations d'Euler.

La projection de OT sur Oz est la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe; appelons $x', y', z'$ les coordonnées du point T dans les axes mobiles : $z' = \Sigma m(xV_y - yV_x)$

Développons :

$$z' = \Sigma m\left[x(rx - pz) - y(qz - ry)\right] = \Sigma m\left[r(x^2+y^2) - pxz - qyz\right]$$
$$= r\,\Sigma m(x^2+y^2) - p\,\Sigma mxz - q\,\Sigma myz$$

Or, les axes Oxyz étant les axes principaux d'inertie relatifs au p.

O, on a : $\Sigma mxz = 0$ $\Sigma myz = 0$

D'ailleurs, $\Sigma m(x^2+y^2)$ est le moment d'inertie du corps par rapport à Oz ; appelons A, B, C les moments d'inertie relatifs à Ox, Oy, Oz ; on obtient : $z' = Cr$

et de même : $x' = Ap$ $y' = Bq$

Nous devons écrire que la vitesse du point I $(V_x, V_y, V_z)$ est égale et parallèle à OG (L, M, N). Le point I étant mobile par rapport aux axes Oxyz, on a : $V_x = \frac{dx'}{dt} + qz' - ry'$

Or : $\frac{dx'}{dt} = A\frac{dp}{dt}$ $A\frac{dp}{dt} + q.Cr - r.Bq = L$

On a finalement les 3 équations d'Euler :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = M$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = N$$

Les seconds membres de ces équations, variables avec le temps, s'expriment en fonction des 9 cosinus ; ainsi que p, q, r ; on a donc 3 relations qui achèvent de déterminer les 9 cosinus en fonction du temps. Mais cela fait 9 équations simultanées à résoudre et il vaut mieux employer les 3 angles d'Euler, pour réduire le nombre des équations au minimum, 3.

On sait comment on définit les 3 angles d'Euler. Soit OI l'intersection des plans xOy, $x_1Oy_1$ ; on choisit arbitrairement le sens OI, et on pose : $x_1\hat{O}I = \psi$

angle compté à partir de $Ox_1$ dans le sens positif c.à.d. vers $Oy_1$. OI étant perpendiculaire à la fois à $Oz$ et $Oz_1$, on pose :

$$z_1\hat{O}z = \theta$$

angle compté à partir de $Oz_1$ dans le sens positif autour de OI. Enfin on définit la position des axes $Ox$, $Oy$ dans leur plan (perpendiculaire à $Oz$) en posant :

$$IOx = \varphi$$

angle compté à partir de OI dans le sens positif autour de $Oz$.

Comme on suppose les 2 trièdres des axes orientés de la même façon, $Oy$ est à $90^\circ$ de $Ox$ dans le sens positif autour de $Oz$, c.à.d. que :

$$I\hat{O}y = \varphi + 90^\circ$$

Les 3 angles $\theta, \varphi, \psi$ sont les angles d'Euler on connaît par la géométrie élémentaire leurs expressions en fonction des 9 cosinus.

Nous devons définir $p, q, r$ en fonction des 3 angles d'Euler. Or, pour passer d'une position du corps à la position infiniment voisine, ce qui a lieu effectivement par la rotation instantanée $O\omega$, on peut faire tourner le corps d'un angle $d\psi$ autour de $Oz_1$, puis d'un angle $d\theta$ autour de OI, enfin d'un angle $d\varphi$ autour de $Oz$. Ces 3 rotations infiniment petites ont d'ailleurs des vitesses angulaires :
$$\frac{d\psi}{dt} = \psi' \qquad \frac{d\theta}{dt} = \theta' \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$$
que l'on portera respectivement sur $Oz_1$, $OI$, $Oz$. La rotation

instantané est la résultante de ces 3 rotations, c.à.d. que $O\omega$ est la somme géométrique des 3 vecteurs $\psi'$ sur $Oz_1$, $\theta'$ sur $OI$, $\varphi'$ sur $Oz$. Donc ses projections $(p, q, r)$ sont égales aux sommes des projections de ces 3 rotations composantes sur les 3 axes. — Projetons $O\psi'$ sur le plan $xOy$ suivant $O\psi''$ ; $O\psi'' = O\psi' . \sin\theta$

On aura donc :

$$p = \theta' \cos\varphi + \psi' \sin\theta \sin\varphi$$

$$q = -\theta' \sin\varphi + \psi' \sin\theta \cos\varphi$$

$$r = \varphi' + \psi' \cos\theta$$

On joindra ces 3 relations aux équations d'Euler; on aura ainsi 6 équations du 1er ordre, définissant $p, q, r, \theta, \varphi, \psi$ en fonction du temps. On peut éliminer $p, q, r$ par les formules précédentes : on aura alors 3 équations du 2e ordre définissant $\theta, \varphi, \psi$ en fonction du temps ; les équations du mouvement contiendront donc 6 constantes arbitraires que l'on déterminera par les conditions initiales connaissant $\theta_0$ $\varphi_0$ $\psi_0$, $p_0$ $q_0$ $r_0$.

Pour achever le problème, il reste à déterminer la réaction $OQ$ du point fixe. On aura 3 équations pour en calculer les composantes, en appliquant le théorème des projections des quantités de mouvement. Soit $R$ la résultante générale des forces données par rapport à $O$, composons $OR$ et $OQ$ en $OR'$ ; c'est la résultante générale des forces extérieures. Soit d'autre part $Op$ la résultante générale des quantités de mouvement ; le théorème exprime que la vitesse du point $p$ à chaque instant est égale et parallèle à $OR'$ ; soient $V''_x$, $V''_y$, $V''_z$ ses projections, $X, Y, Z$ celles de $R$, $Q_x$, $Q_y$, $Q_z$ celles de $Q$ ; on a :

$$V''_x = X + Q_x \qquad V''_y = Y + Q_y \qquad V''_z = Z + Q_z$$

Pour calculer $V''_x, V''_y, V''_z$, cherchons les coordonnées du point $\rho$, puis les composantes de sa vitesse (comme plus haut pour $\Gamma$.)
Les projections $x'', y'', z''$ du vecteur $O\rho$ sont :

$$x'' = \Sigma m V_x = \Sigma m (qz - ry) = q\Sigma mz - r\Sigma my = M(q\zeta - r\eta)$$

$\xi, \eta, \zeta$ étant les coordonnées (constantes) du centre de gravité ; d'autre part, le point $\rho$ étant mobile dans les axes $Oxyz$, on a :

$$V''_x = \frac{dx''}{dt} + qz'' - ry''$$

D'où les 3 équations :

$$M\left(\zeta \frac{dq}{dt} - \eta \frac{dr}{dt}\right) + qz'' - ry'' = X + Q_x$$

$$M\left(\xi \frac{dr}{dt} - \zeta \frac{dp}{dt}\right) + rx'' - pz'' = Y + Q_y$$

$$M\left(\eta \frac{dp}{dt} - \xi \frac{dq}{dt}\right) + py'' - qx'' = Z + Q_z$$

d'où l'on tirera $Q_x, Q_y, Q_z$, connaissant $p, q, r$ et leurs dérivés par rapport au temps.

Nous allons étudier le cas le plus simple, celui où les forces données ont une résultante unique passant par le point $O$.

Si le corps était abandonné à lui-même sans vitesse initiale, il serait en équilibre indifférent, toutes les forces extérieures passant par le point fixe. Donc $L, M, N$ projections du moment résultant, sont nulles, et les équations d'Euler deviennent :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0$$

On peut dans ce cas les intégrer séparément, car elles ne contiennent

plus les 3 angles d'Euler, qui ne figuraient qu'au second membre: on connaîtra donc immédiatement $p, q, r$. On peut par des combinaisons simples trouver 2 intégrales premières de ces équations:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{d'où:} \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \qquad (1)$$

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{d'où:} \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \ell^2 \qquad (2)$$

On peut remplacer 2 des équations d'Euler par les équations (1) et (2); nous y joindrons:

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = 0 \qquad (3)$$

On pourra tirer $p^2$, $r^2$ des équations finies (1) et (2) et les porter dans l'équation (3); on aura: $\frac{dq}{dt} = f(q)$ d'où l'on tirera $q$ en fonction de $t$ par une quadrature.

Les équations (1) et (2) ont une signification connue: l'équation (1) est l'intégrale des forces vives. Calculons en effet la force vive du corps; la vitesse d'un point quelconque a pour projections sur $Ox, Oy, Oz$:

$$V_x = qz - ry \qquad V_y = rx - pz \qquad V_z = py - qx$$

$$V^2 = (qz-ry)^2 + (rx-pz)^2 + (py-qx)^2$$
$$= p^2(y^2+z^2) + q^2(z^2+x^2) + r^2(x^2+y^2) - 2qryz - 2prxz - 2pqxy$$

$$\Sigma m V^2 = p^2\Sigma m(y^2+z^2) + q^2\Sigma m(z^2+x^2) + r^2\Sigma m(x^2+y^2) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

Les termes en $\Sigma myz$, $\Sigma mxz$, $\Sigma mxy$ s'annulent à cause du choix des axes principaux d'inertie pour $Ox, Oy, Oz$. — Or, dans le cas présent, les forces données ont un travail nul, puisque leur résultante passe par le point fixe $O$ et peut lui être appliquée; donc la force vive du corps est constante: $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$.

L'équation (2) exprime que le moment résultant des quantités de

mouvement par rapport à O a une grandeur constante. En effet, on sait qu'en général la vitesse du point I est égale et parallèle à OG; or OG est nul dans le cas présent; donc OI est fixe en grandeur et direction par rapport au corps (le plan du maximum des aires est invariable.) Soit $l$ la longueur de OI; ses projections sont $Ap$, $Bq$, $Cr$; on a donc:
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2$$

Pour calculer $\theta$, $\varphi$, $\psi$, on peut employer les formules générales. Mais il vaut mieux profiter de ce que OI a une direction fixe pour en faire l'axe fixe $Oz_1$. La longueur: $OI = l$ est constante. Exprimons que ses projections sur les axes mobiles $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont respectivement: $Ap$, $Bq$, $Cr$:
$$l\sin\theta\sin\varphi = Ap \qquad l\sin\theta\cos\varphi = Bq \qquad l\cos\theta = Cr.$$
Ces 3 équations ne sont pas indépendantes; on en tire $\theta$ et $\varphi$ sans intégration. Reste à calculer $\psi$; on le tire des équations:
$$p = \theta'\cos\varphi + \psi'\sin\theta\sin\varphi \qquad q = -\theta'\sin\varphi + \psi'\sin\theta\cos\varphi$$
d'où, par une combinaison: $p\sin\varphi + q\cos\varphi = \psi'\sin\theta$
$$\psi' = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{l\sin^2\theta} = l\,\frac{h - Cr^2}{l^2 - C^2r^2}$$
Car: $Ap^2 + Bq^2 = h - Cr^2$ et $l^2\sin^2\theta = l^2 - C^2r^2$

$r$ étant exprimé en fonction du temps, et $\psi'$ en fonction de $r$, on aura $\psi$ par une quadrature. — On peut exprimer $p$, $q$, $r$ en fonction uniforme du temps au moyen des fonctions elliptiques.

Jacobi a montré que les 9 cosinus s'exprimaient aussi en fonction uniforme du temps, par des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

On a d'abord, $OI$ coïncidant avec $Oz$, :

$$\gamma = \sin\theta \sin\varphi \qquad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi \qquad \gamma'' = \cos\theta$$

qui s'expriment immédiatement en fonction du temps :

$$\gamma = \frac{Ap}{l}, \qquad \gamma' = \frac{Bq}{l}, \qquad \gamma'' = \frac{Cr}{l}.$$

Supposons, pour préciser : $\qquad A > B > C$.

Éliminons $r$ entre les équations (1) et (2) :

$$Ap^2(A-C) + Bq^2(B-C) = l^2 - Ch$$

On voit que $\quad l^2 - Ch \quad$ doit être essentiellement positif, à moins que $p_0, q_0$ ne soient tous deux nuls, auquel cas cette quantité constante serait nulle. L'équation précédente peut s'écrire :

$$Ap^2(A-C) = B(B-C)(f^2 - q^2) \qquad (4)$$

en posant :

$$f^2 = \frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}$$

Éliminons de même $p$ entre les équations (1) et (2) :

$$Bq^2(A-B) + Cr^2(A-C) = Ah - l^2$$

Il faut encore que $\quad Ah - l^2 \quad$ soit essentiellement positif (ou nul, dans le cas où : $q_0 = 0$, $r_0 = 0$.) On a donc la double condition :

$$Ch \leq l^2 \leq Ah$$

On peut écrire :

$$Cr^2(A-C) = B(A-B)(g^2 - q^2) \qquad (5)$$

en posant :

$$g^2 = \frac{Ah - l^2}{B(A-B)}$$

On tire donc des équations (4) et (5) les expressions suivantes :

$$p = \pm\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}\sqrt{f^2 - q^2} \qquad r = \pm\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}}\sqrt{g^2 - q^2}$$

Le signe de chacun des radicaux est déterminé par les conditions initiales : il sera, au début du mouvement, le même que celui de $p_0$ et de $r_0$.

Les radicaux s'annulent respectivement pour les valeurs :

$$q = \pm f, \qquad q = \pm g$$

Pour connaître quelle est la plus grande des 2 quantités $f$, $g$, il faut savoir le signe de $(g^2 - f^2)$ - Si l'on calcule $g^2 - f^2$, on trouve :

$$g^2 - f^2 = \frac{(A-C)\ (Bh - l^2)}{B(A-B)(B-C)}$$

On voit que son signe dépend de celui du binôme : $Bh - l^2$.

Supposons par exemple : $g^2 < f^2$

$q$ ne pourra varier qu'entre $+g$ et $-g$, sans quoi le radical qui figure dans $r$ deviendrait imaginaire ; donc $r$ s'annulera périodiquement, et $p$ ne s'annulera jamais.

Si l'on porte les expressions de $p$, $r$ dans l'équation (3), il vient :

$$B\frac{dq}{dt} = (C-A)\,pr \qquad \text{d'où :} \quad \frac{dq}{dt} = \lambda\sqrt{(f^2-q^2)(g^2-q^2)}$$

en posant : $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{(A-B)(B-C)}{AC}}$

$$\lambda\,dt = \frac{dq}{\sqrt{(f^2-q^2)(g^2-q^2)}} \qquad \lambda t = \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{(f^2-q^2)(g^2-q^2)}}$$

On a $t$ en fonction de $q$ par une intégrale elliptique de 1<sup></sup>re espèce.

Pour la ramener à la forme normale, dont les limites sont 0 et 1, posons : $q = gu$

$$k = \frac{g}{f} < 1. \qquad \lambda\,dt = \frac{1}{f}\,\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

d'où en posant : $\mu = \lambda f$, l'intégrale elliptique :

$$\mu(t-t_0) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

Faisons l'inversion :

$u = sn\,\mu(t-t_0)$ d'où : $q = g\,sn\,\mu(t-t_0)$

On exprime de même $p$ et $r$ par des fonctions elliptiques :

$$r = C'\sqrt{g^2-q^2} = C'g\sqrt{1-u^2} = \rho\, cn\,\mu(t-t_0) \qquad \rho = C'g.$$

$$p = C''\sqrt{f^2-q^2} = C''f\sqrt{1-k^2u^2} = \varpi\, dn\,\mu(t-t_0) \qquad \varpi = C''f$$

Connaissant $p, q, r$, on a immédiatement $\theta$ et $\varphi$ par les expressions connues de $\gamma, \gamma', \gamma''$. Reste à calculer $\psi$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = l\,\frac{h - Cr^2}{l^2 - C^2r^2} = f(t)$$

$f$ étant une fonction de : $cn\,\mu(t-t_0)$ — En intégrant :

$$\psi = \int f(t)\,dt$$

quadrature qui contiendra des logarithmes, et qu'on obtient en décomposant $f$ en éléments simples par la méthode de M. Hermite.

— Les constantes $\varpi$ et $\rho$ sont les valeurs initiales de $p, r$ puisque : $cn\,0 = 1$ $dn\,0 = 1$. Donc :

$$p = p_0\, dn\,\mu(t-t_0) \qquad q = g\,sn\,\mu(t-t_0) \qquad r = r_0\, cn\,\mu(t-t_0)$$

On peut étudier le mouvement au moyen de ces formules : les fonctions elliptiques étant périodiques, $sn$, $cn$, $dn$ reprennent les mêmes valeurs après la période réelle $\frac{4K}{\mu}$ (nous n'avons pas à considérer la période imaginaire) Donc $p, q, r$ redeviennent les mêmes après chaque

période ; $\theta$ et $\varphi$ également reprennent les mêmes valeurs, puisqu'ils dépendent directement de $p, q, r$. Quant à $\psi$, il augmente d'une quantité constante à chaque période, puisque $\frac{d\psi}{dt}$ repasse par la même valeur. Ainsi la position du corps après une période $\frac{4K}{\mu}$ se déduit de la position initiale par une rotation autour de $Oz_1$ ; $OI$ tourne dans le plan $x_1Oy_1$ d'un angle constant à chaque période. De plus, comme l'état des vitesses redevient le même après une période, le mouvement repasse par les mêmes phases, à partir de la nouvelle position de $OI$.

On a vu en cinématique que ce mouvement peut se représenter par le roulement d'un cône mobile ~~sur un cône fixe~~, leur sommet commun étant $O$. Le cône mobile est du 2e degré ; en effet, c'est le lieu dans le corps de l'axe instantané, qui a pour équations : $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$.
Pour avoir le lieu de l'axe instantané dans les axes $Oxyz$ éliminons les termes constants entre les équations (1) et (2) ; on obtient la relation homogène :
$$Ap^2(Ah-l^2)+Bq^2(Bh-l^2)+Cr^2(Ch-l^2)=0$$
qui devient l'équation du cône en remplaçant $x, y, z$ par $p, q, r$ :
$$Ax^2(Ah-l^2)+By^2(Bh-l^2)+Cz^2(Ch-l^2)=0$$
Ce cône a les mêmes plans principaux que l'ellipsoïde d'inertie.
Pour qu'il soit réel, il faut que les coefficients ne soient pas tous de même signe ; or : $A>B>C$ ; on doit donc avoir :
$$Ah-l^2>0 \qquad Ch-l^2<0$$
conditions trouvées précédemment. Examinons les cas extrêmes :
1° Si $Ah-l^2=0$, l'équation se réduit à :
$$By^2(B-A)+Cz^2(C-A)=0 \qquad \left\{\begin{array}{l} B-A<0 \\ C-A<0 \end{array}\right.$$

dont la seule solution réelle est l'axe des $x$ ; $y=0, \; z=0$.
Le cône se réduit à 2 plans imaginaires passant par l'axe des $x$.
Donc $Ox$ est axe permanent de rotation - Pour que cela ait lieu, il faut évidemment qu'il soit l'axe initial de rotation, c.à.d que :

$$q_0 = 0, \quad r_0 = 0.$$

2° Si $Ch - l^2 = 0$, on trouve de même que $Oz$ est l'axe permanent de rotation, et l'on doit avoir : $p_0 = 0, \; q_0 = 0$.

3° Dans le cas intermédiaire où : $Bh - l^2 = 0$
l'équation devient : $Ax^2(A-B) - Cz^2(B-C) = 0$
Le cône se réduit à 2 plans réels qui se coupent suivant $Oy$ ($x=0, z=0$ est une solution commune) et symétriques par rapport aux 2 plans $yOx$, $yOz$. L'axe instantané décrira celui de ces 2 plans dans lequel il se trouve au début du mouvement.

– Le cône fixe sur lequel roule le cône mobile a une équation transcendante. C'est en effet le lieu de l'axe instantané dans l'espace ; pour le trouver, il faut calculer les projections $p_1\, q_1\, r_1$ de la rotation instantanée sur les axes fixes :

$$p_1 = p\alpha + q\alpha' + r\alpha''$$
$$q_1 = p\beta + q\beta' + r\beta''$$
$$r_1 = p\gamma + q\gamma' + r\gamma''$$

On aura $p_1\, q_1\, r_1$ en fonction de $t$ par l'intermédiaire des fonctions elliptiques ; on éliminera le temps entre 2 rapports : $\frac{p_1}{r_1}, \frac{q_1}{r_1}$ et on remplacera $p_1\, q_1\, r_1$ par $x_1\, y_1\, z_1$, puisque les équations de l'axe instantané sont :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}.$$

Nous allons examiner les mêmes cas particuliers que pour le cône mobile

1° Si : $Ah - l^2 = 0$, l'axe instantané est $Ox$, fixe dans le corps mobile ; le cône roulant se réduisant à une droite reste fixe ; donc le cône fixe se réduit aussi à une droite. En effet, on a constamment :

$$q = 0, \quad r = 0 \qquad \text{donc :} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ce qui montre que $Ox$ coïncide constamment avec $Oz_1$.

$Oz_1$ est donc l'axe permanent de rotation (c'est la direction $OI$.)

2° Si : $Ch - l^2 = 0$, l'axe instantané est $Oz$, fixe dans le corps : donc il est fixe dans l'espace. On a : $p = 0, \quad q = 0$

donc : $\theta = 0$ $\qquad Oz$ coïncide constamment avec $Oz_1$.

$Oz_1$ est encore l'axe permanent de rotation

3° Si : $Bh - l^2 = 0$, l'axe instantané décrit dans le corps un plan. Les fonctions elliptiques qui expriment $p, q, r$ se réduisent alors à des exponentielles ; en effet, $(Bh - l^2)$ étant facteur dans $(g^2 - f^2)$, on a : $g^2 = f^2$ $\qquad$ d'où : $k^2 = \frac{g^2}{f^2} = 1$

Les équations se réduisent à :

$$q = gu \qquad p = p_0\sqrt{1-u^2} \qquad r = r_0\sqrt{1-u^2}$$

On voit que : $\qquad \frac{p}{r} = \frac{p_0}{r_0} = C^{te}$

ce qui montre que l'axe instantané décrit un plan passant par $Oy$.

$$\mu\, dt = \frac{du}{1-u^2} = \frac{du}{2}\left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right] \qquad 2\mu(t-t_0) = \log\frac{1+u}{1-u}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2\mu(t-t_0)}$$

Calculons $\underline{u}$ :

$$\frac{1+u}{e^{\mu(t-t_0)}} = \frac{1-u}{e^{-\mu(t-t_0)}} = \frac{2}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}} = \frac{2u}{e^{\mu(t-t_0)} - e^{-\mu(t-t_0)}}$$

d'où l'on tire $u$, $1+u$, $1-u$

$$u = \frac{e^{\mu(t-t_0)} - e^{-\mu(t-t_0)}}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}}$$

$$1+u = \frac{2e^{\mu(t-t_0)}}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}} \qquad 1-u = \frac{2e^{-\mu(t-t_0)}}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}}$$

$$1-u^2 = \frac{4}{\left[e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}\right]^2}$$

$\sqrt{1-u^2}$ est une fonction uniforme de $\underline{t}$. On a donc les expressions :

$$q = g\,\frac{e^{\mu(t-t_0)} - e^{-\mu(t-t_0)}}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}}.$$

$$p = p_0\,\frac{2}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}} \qquad r = r_0\,\frac{2}{e^{\mu(t-t_0)} + e^{-\mu(t-t_0)}}$$

On obtiendra immédiatement $\theta$ et $\varphi$ ; on pourra aussi calculer $\psi$, car $\frac{d\psi}{dt}$ est maintenant une fonction rationnelle de : $e^{\mu(t-t_0)} = s$ ;

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{hl(s^2+1)^2 - 4Clr_0^2s^2}{l^2(s^2+1)^2 - 4C^2r_0^2s^2}$$

qu'on peut intégrer.

Pour $t = t_0$, $q = 0$ — $p = p_0$ $r = r_0$.

Quand $\underline{t}$ augmente indéfiniment, on a :

$$\lim q = g \qquad \lim p = 0 \qquad \lim r = 0.$$

Ainsi l'axe instantané décrit dans le corps un plan passant par $Oy$, et il tend à se confondre avec cet axe. D'autre part, $p$ et $\underline{r}$

étant nuls pour $t = \infty$, on a : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$
Donc dans l'espace, l'axe instantané tend à se confondre avec Oz, (ou OI.) - Au bout d'un temps suffisamment long, la rotation se confond ~~sensiblement~~ avec la rotation autour de l'axe fixe Oz, avec lequel coïncide sensiblement l'axe Oy du corps - Si au début du mouvement l'axe instantané et OI coïncidaient avec Oy, le corps continuerait à tourner indéfiniment autour de Oy, qui serait alors un axe permanent de rotation -

- Le problème se simplifie dans le cas où l'ellipsoïde d'inertie est de révolution - Les fonctions elliptiques se réduisent alors à des fonctions circulaires. - On a par hypothèse : $A = B$
La 3e équation d'Euler devient : $C\frac{dr}{dt} = 0$ $\quad r = r_0$
On a d'autre part : $Cr = l\cos\theta$ $\quad$ d'où : $\theta = \theta_0$

$$p = \frac{l\sin\theta_0}{A}\sin\varphi \qquad q = \frac{l\sin\theta_0}{A}\cos\varphi$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{l\sin\theta_0}{A}\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = q\frac{d\varphi}{dt}$$

Portons cette valeur dans la 1e équation d'Euler :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr_0 = 0 \qquad A\frac{d\varphi}{dt} = (A-C)r_0$$

on en tire $\varphi$ : $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A-C}{A}r_0$ $\qquad \varphi = \frac{A-C}{A}r_0 t + \varphi_0$

Calculons $\psi$ : $\frac{d\psi}{dt} = l\frac{h - Cr_0^2}{l^2 - C^2r_0^2} = C^{te}$

ou $\frac{d\psi}{dt} = l\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} = \frac{l}{A}$ $\qquad$ d'où : $\psi = \frac{l}{A}t + \psi_0$

Comme on a $p, q$ en fonction de $t$ par des fonctions circulaires,

le cône mobile et le cône fixe sont de révolution autour de $Oz$ et $Oz_1$ : la rotation instantanée $O\omega$ est la résultante des 3 rotations $\theta', \varphi', \psi'$ autour des 3 axes $OI$, $Oz$, $Oz_1$ ; or dans le cas présent :

$$\theta' = 0 \qquad \varphi' = \frac{A-C}{A} r_0 \qquad \psi' = \frac{l}{A}$$

Il reste donc 2 composantes $\varphi', \psi'$, dont l'angle $\theta$ est constant.

Il en résulte que la rotation instantanée est constante et fait avec $Oz$, $Oz_1$ des angles constants —

On aurait obtenu la même conclusion en considérant que $r = r_0$, et que $\sqrt{p^2+q^2} = \frac{l \sin\theta_0}{A} = C^{te}$.

Si l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère ($A = B = C$), on voit que $\varphi'$ s'annule, et que la rotation instantanée se réduit à la rotation $\psi'$ autour de $Oz_1$, constante en grandeur et direction.

— Mouvement d'un corps pesant suspendu par son centre de gravité — Ce problème est un cas particulier du précédent — Nous allons le traiter par la méthode géométrique de Poinsot, qui en offre une représentation simple. Auparavant, nous établirons quelques théorèmes généraux de cinématique, indépendants des hypothèses particulières que nous avons faites, mais qui trouvent leur application dans le cas présent.

I. Figurons l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O : soit Oω l'axe instantané, P le point où il perce la surface de l'ellipsoïde, qu'on appelle le *pôle*. Posons :

$$\rho = OP$$

La force vive du corps dans cette rotation instantanée est, comme on sait : $Mk^2\omega^2$.

Or le moment d'inertie relatif à l'axe Oω est : $\frac{1}{\rho^2}$

La force vive est donc : $\frac{\omega^2}{\rho^2}$. — On peut le démontrer autrement :

Les coordonnées du point P sont : $x = \rho\frac{p}{\omega}$ $y = \rho\frac{q}{\omega}$ $z = \rho\frac{r}{\omega}$

Or elles vérifient l'équation de l'ellipsoïde : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

donc on a : $\frac{\rho^2}{\omega^2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) = 1$

Or la force vive est précisément : $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \frac{\omega^2}{\rho^2}$.

II. Le plan tangent au point P à l'ellipsoïde est perpendiculaire au moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point fixe O.

Soit OT ce moment résultant : ses projections sont Ap, Bq, Cr.

D'autre part le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x, y, z) a pour équation : $AXx + BYy + CZz = 1$

Donc le plan tangent en P est : $\frac{\rho}{\omega}\left[ApX + BqY + CrZ\right] = 1$

ce qui prouve que ce plan est perpendiculaire à la droite OT.

III. Calculons la distance du plan tangent à l'ellipsoïde en P au centre O. Soit δ cette distance mesurée sur OT :

$$\delta = \frac{1}{\frac{\rho}{\omega}\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} = \frac{\omega}{\rho l}$$ l, longueur de OI

Appliquons ces théorèmes au cas particulier où la résultante des forces directement appliquées passe par le point fixe O. On sait que dans ce cas la force vive est constante; on a donc

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = h \qquad \omega = \rho\sqrt{h}.$$

On sait aussi que OI est constant en grandeur et en direction; il en résulte que le plan tangent Π a une direction fixe dans l'espace; de plus, l étant constante, $\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = C^{te}$

Ainsi, pendant toute la durée du mouvement, l'ellipsoïde d'inertie est en contact avec un plan fixe, son centre étant également fixe: l'axe instantané est la droite qui joint le centre O au point de contact instantané P. — On connaît le plan fixe Π par sa position initiale. Le point de contact P décrit sur l'ellipsoïde une courbe appelée polodie; c'est l'intersection de l'ellipsoïde avec le cône mobile du 2e degré; c'est donc une courbe du 4e degré. — Le point P décrit d'autre part sur le plan Π une courbe nommée erpolodie; c'est l'intersection du plan fixe avec le cône fixe. On peut représenter le mouvement du corps par le roulement de l'ellipsoïde sur le plan fixe, son centre restant fixe. Dans ce mouvement, la polodie roule sur l'erpolodie, de sorte que la vitesse du point de contact à chaque instant est nulle.

Cherchons les équations de la polodie: c'est le lieu des points de contact

d'un plan tangent à l'ellipsoïde situé à la distance constante $\delta$ du centre O : ces points vérifient d'abord l'équation de l'ellipsoïde :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Le plan tangent au point $(x, y, z)$ est : $AXx + BYy + CZz = 1.$

Sa distance à l'origine O est : $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$

d'où, $\delta$ étant donné, l'équation :

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{1}{\delta^2}$$

Le point de contact P vérifie aussi cette seconde équation ; donc les 2 équations précédentes définissent la polodie comme l'intersection de 2 ellipsoïdes ayant mêmes plans principaux. Pour avoir l'équation du cône roulant, il suffit d'éliminer les termes constants entre ces 2 équations ; on a l'équation homogène :

$$Ax^2\left(A - \frac{1}{\delta^2}\right) + By^2\left(B - \frac{1}{\delta^2}\right) + Cz^2\left(C - \frac{1}{\delta^2}\right) = 0.$$

Pour que ce cône soit réel, il faut que $\dfrac{1}{\delta^2}$ soit compris entre A et C, c.à.d. que $\delta$ soit comprise entre le petit axe et le grand axe de l'ellipsoïde :

$$\frac{1}{\sqrt{A}} < \delta < \frac{1}{\sqrt{C}}$$

$\delta$ dépend des conditions initiales c'est donc une constante arbitraire. La polodie affecte diverses formes suivant les valeurs assignées à $\delta$.

Si $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$, la polodie se réduit à l'extrémité A du petit axe Ox.

Si $\delta$ augmente un peu à partir de cette valeur minima (petit axe) on a un cône entourant le petit axe, et la polodie entoure le point A.

Si $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{B}}$ (moyen axe) le cône se décompose en 2 plans passant par le moyen axe Oy : la polodie se compose de 2 ellipses

se coupant en B, B', extrémités du moyen axe.

Si $\delta = \frac{1}{\sqrt{C}}$, la polodie se réduit à l'extrémité C du grand axe Oz.

Si $\delta$ diminue un peu, on a un cône entourant Oz, et la polodie entoure le point C. Quand $\delta$ approche de $\frac{1}{\sqrt{B}}$ (dans un sens ou dans l'autre) on a une courbe voisine des 2 ellipses BB', et située soit du côté de A, soit du côté de C.

On voit que par chaque point de l'ellipsoïde passe une polodie, et une seule; il suffira donc de connaître la position initiale du pôle $P_0$ ou de l'axe instantané pour connaître la polodie, d'où l'on déduira immédiatement le cône roulant.



— Stabilité de la rotation — On sait que si le corps commence à tourner autour d'un des 3 axes principaux OA, OB, OC, il continue à tourner indéfiniment autour de cet axe; dans ce cas, la polodie se réduit à un point fixe (A, B ou C) et l'herpolodie aussi.

Supposons qu'on modifie infiniment peu la position et la vitesse initiales: le mouvement est dit stable si le nouveau mouvement en diffère infiniment peu réellement — Supposons que le corps tournant autour de OC, on déplace infiniment peu l'axe instantané: le pôle décrira alors une courbe infiniment petite autour du point C:

donc la rotation autour de OC est stable. On montrerait de même que la rotation autour de OA est stable. Si au contraire, le corps tournant autour de OB, on déplace infiniment peu l'axe instantané, le pôle se mettra à décrire une ellipse des 2 autour de l'ellipsoïde, et par suite s'éloignera de B d'une distance $\overline{BB'}$ finie: la rotation autour de OB est donc instable.

— Cherchons les équations de herpolodie. Abaissons la perpendiculaire $OO_1 = \delta$ sur le plan $\Pi$; posons: $OP = \rho$ $\quad O_1P = \rho_1$

on a: $\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$

On sait que la polodie roule sur l'herpolodie, donc leurs arcs correspondants sont égaux: soient $s$ l'arc de polodie, $s_1$ l'arc d'herpolodie: $\quad ds_1 = ds$.

Calculons $ds$. Les coordonnées du point P sont déterminées par les 3 équations:

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \dfrac{1}{\delta^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}$$

d'où l'on tire:

$$x = \varphi(\rho^2) \qquad y = \psi(\rho^2) \qquad z = \varpi(\rho^2)$$

$$dx = 2\varphi'\rho\, d\rho \qquad dy = 2\psi'\rho\, d\rho \qquad dz = 2\varpi'\rho\, d\rho$$

d'où: $\quad ds^2 = f(\rho^2)\, 4\rho^2 d\rho^2 \qquad$ Or: $\quad \rho_1 d\rho_1 = \rho\, d\rho$ :

$$ds^2 = f(\rho_1 + \delta^2)\, 4\rho_1^2 d\rho_1^2 = ds_1^2.$$

Prenons dans le plan $\Pi$ des axes fixes $O_1x_1y_1$; en coordonnées polaires: $\quad \rho_1 = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta_1 = x\hat{O_1}P = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$ds_1^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\theta_1^2$

On a donc la relation :

$$d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\theta_1^2 = f(\rho_1^2 + \delta^2)\, 4\rho_1^2 d\rho_1^2$$

équation différentielle de l'herpolodie dans le plan Π. On aura $\theta_1$ en fonction de $\rho_1$ par une intégrale elliptique :

$$d\theta_1 = \sqrt{4f(\rho_1^2+\delta^2) - \frac{1}{\rho_1^2}}\, d\rho_1$$

Elle se ramène aux fonctions élémentaires quand : $Bh - \ell^2 = 0$. C'est le cas où la polodie se décompose en 2 ellipses croisées. L'herpolodie est alors une spirale ayant pour point asymptote le point $O_1$ ; l'axe instantané approche donc indéfiniment à la fois de $OO_1$ dans l'espace et de $Oy$ dans le corps, de sorte que $Oy$ tend à se confondre avec $OO_1$, et qu'à la longue le corps semble tourner autour de ces 2 axes qui coïncident sensiblement.

— Mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe.

Soit $O$ le point fixe du corps, $G$ son centre de gravité, $Mg$ son poids. Menons les axes fixes $Ox_1y_1z_1$, $Oz_1$ étant vertical vers le haut. Prenons pour axes mobiles $Oxyz$ les axes principaux d'inertie relatifs au point $O$. Soient $\gamma, \gamma', \gamma''$ les cosinus des angles que fait $Oz_1$ avec $Ox$, $Oy$, $Oz$ ; on a les relations connues :

$$\gamma = \sin\theta \sin\varphi \qquad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi \qquad \gamma'' = \cos\theta$$

Soient $\xi, \eta, \zeta$ les coordonnées de $G$ dans les axes mobiles, $\zeta_1$ sa coordonnée suivant $Oz_1$. On a évidemment :

$$\zeta_1 = \xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta\gamma''$$

D'autre part le poids a pour projections sur les axes mobiles :

$X = -Mg\gamma \qquad Y = -Mg\gamma' \qquad Z = -Mg\gamma''$

On peut écrire les 3 équations d'Euler; mais il vaut mieux obtenir 2 intégrales premières en appliquant les théorèmes généraux.
Le théorème des forces vives donne:

$$d\,\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2) = -Mg\,d\zeta_1$$

d'où l'intégrale des forces vives:

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2 = -2Mg\zeta_1 + h \qquad (1)$$

Si l'on applique le théorème des moments des quantités de mouvement à l'axe $Oz_1$, on voit que la somme des moments des forces extérieures est nulle, le poids étant parallèle à $Oz_1$, et la réaction du point O rencontrant $Oz_1$. Donc, en intégrant la somme des moments des quantités ~~de mouvement est~~ constante. Pour la calculer, il suffit de projeter OT sur $Oz_1$. Or les projections de OT sur les axes mobiles sont $Ap$, $Bq$, $Cr$. La projection par rapport à $Oz_1$ cherchée est donc:

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cq\gamma'' \quad \text{qui est constante;}$$

d'où l'équation: $\quad Ap\sin\theta\sin\varphi + Bq\sin\theta\cos\varphi + Cq\cos\theta = k \qquad (2)$

Remplaçons deux des équations d'Euler par les équations (1) et (2) et conservons la 3e: $\quad N = \xi Y - \eta X = -Mg(\xi\gamma' - \eta\gamma)$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = Mg(\eta\gamma - \xi\gamma') \qquad (3)$$

En y joignant les 3 équations qui expriment $p, q, r$ en fonction de $\theta, \varphi, \psi$, on a un système de 6 équations, dont 2 finies, et 4 du 1er ordre, pour déterminer $p, q, r$, $\theta, \varphi, \psi$ en fonction du temps.
On ne peut intégrer ce système que dans des cas particuliers.
Le cas le plus simple, étudié par Euler et Poisson (et aussi par Poinsot

et Jacobi) est celui où le corps est suspendu par son centre de gravité. ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$.) Le poids du corps est alors supprimé. C'est le problème que nous avons traité précédemment.

Un autre cas, étudié par Lagrange, est celui où l'ellipsoïde d'inertie est de révolution et où son axe de révolution passe par le centre de gravité du corps ($A = B$, $\xi = 0$, $\eta = 0$.)

Un troisième cas étudié récemment par M^me Kowalevski, est celui où l'ellipsoïde d'inertie est de révolution d'une forme particulière, et où le centre de gravité du corps se trouve dans l'équateur (plan $xOy$). On a : $A = B = 2C$, $\zeta = 0$.

(cf. Journal de Crelle, tome XII.)

Dans le cas de Lagrange, le problème se simplifie immédiatement, car l'équation (3) fournit une 3e intégrale première ; elle se réduit en effet à :

$$C\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{d'où :} \quad r = r_0. \qquad (3')$$

Supposons qu'on ait choisi pour sens positif de $Oz$ le sens $OG$, c.à.d. $\zeta > 0$. L'équation des forces vives (1) devient :

$$p^2 + q^2 = \alpha - a\cos\theta \qquad (1')$$

où $\alpha$ est une constante arbitraire, et $\underline{a}$ une constante connue, positive par hypothèse : $a = \dfrac{2Mg\zeta}{A}$

L'équation des moments des quantités de mouvement (2) devient :

$$\sin\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = \beta - br_0\cos\theta \qquad (2')$$

où $\beta$ est une constante arbitraire, et $\underline{b}$ une constante connue :

$$b = \frac{C}{A}$$

On a d'autre part les relations connues :

$$p = \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}$$

$$q = \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}$$

$$r = \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

En portant ces expressions dans les équations (1'), (2'), (3'), elles deviennent:

$$\sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha - a\cos\theta$$

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \beta - br_0 \cos\theta$$

$$\cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = r_0$$

Les 2 premières donnent $\theta$ et $\psi$ en fonction de $t$. Eliminons $\frac{d\psi}{dt}$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0\cos\theta}{\sin^2\theta} \qquad (\beta - br_0\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \sin^2\theta(\alpha - a\cos\theta)$$

Prenons pour inconnue:

$$\cos\theta = u$$

$$\sin^2\theta = 1 - u^2 \qquad -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dt}.$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (1-u^2)(\alpha - au) - (\beta - br_0 u)^2 = f(u)$$

$f$ étant un polynôme du 3e degré en $u$. On aura à effectuer une quadrature, qui donnera $t$ en fonction de $u$ par une intégrale elliptique de 1e espèce; en faisant l'inversion, on obtiendra $u$ en fonction uniforme du temps. On aura enfin $\psi$ et $\varphi$ par des quadratures au moyen des formules suivantes:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u\frac{d\psi}{dt}$$

Ainsi on connaîtra $\theta, \varphi, \psi$ en fonction du temps. Mais on peut discuter le problème sans effectuer les quadratures.

La discussion porte sur le polynôme du 3e degré: $f(u)$;

Il est donc analogue à celle du pendule sphérique, qui n'est évidemment qu'un cas particulier du problème présent.

Cherchons les racines de $f(u)=0$ ; le coefficient de $u^3$ est $a>0$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| En substituant : | $-\infty$ | $-1$ | $u_0$ | $+1$ | $+\infty$ |
| on trouve les signes : | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| d'où les 3 racines : | | $u_1$ | | $u_2$ | $u_3$ |

$u_0$ étant un cosinus est en effet comprise entre $-1$ et $+1$.

Les racines $u_1$, $u_2$ étant plus petites que 1 en valeur absolue peuvent se traduire par des cosinus :

$u_1 = \cos\theta_1 \qquad u_2 = \cos\theta_2$

La racine $u_3$ doit être rejetée, car si $u$ sortait de l'intervalle $(u_1, u_2)$ $f(u)$ deviendrait négatif, et $\frac{du}{dt}$ imaginaire –

Donc $u$ doit osciller entre $u_1$ et $u_2$ ; on a donc :

$u_1 < u < u_2 \qquad \cos\theta_1 < \cos\theta < \cos\theta_2 \qquad \theta_1 > \theta > \theta_2$

Si nous traçons 2 cônes ayant pour axe $Oz_1$ et pour angles $\theta_1, \theta_2$, le 1er enveloppera le 2e ; et l'axe de révolution $Oz$ sera constamment compris entre eux, et il oscillera de l'un à l'autre.

Si l'on coupe les 2 cônes par une sphère de rayon 1, leurs traces sont les 2 cercles $C_1$ $C_2$, et la trace $P$ de $Oz$ décrit une courbe entre $C_1$ et $C_2$. Pour savoir dans quel sens tourne le plan $zOz_1$, c.à.d. le p. $P$, cherchons le signe de la dérivée :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1-u^2}$$

En effet, c'est la vitesse angulaire du plan $zOz_1$, car c'est celle de $OI$ axe de ce plan ($x_1\hat{O}I = \psi$.) Si $\frac{d\psi}{dt}$ a un signe invariable, le plan $zOz_1$ tourne toujours dans le même sens; si $\frac{d\psi}{dt}$ change de signe, le plan $zOz_1$ tourne alternativement dans un sens ou dans l'autre. — Or le dénominateur est positif, car $|u| < 1$; le numérateur s'annule pour $u = \frac{\beta}{br_0}$

Donc si $\frac{\beta}{br_0}$ n'est pas compris dans l'intervalle $(u_1, u_2)$ le plan $zOz_1$ tourne toujours dans le même sens; si au contraire:

$$u_1 < \frac{\beta}{br_0} < u_2,$$

sa rotation change de sens; le point $P$ rétrograde, et sa trajectoire a des points doubles.

On peut étudier la projection de la trajectoire de $P$ sur le plan $x_1Oy_1$ horizontal; soit $Q$ la projection de $P$, $\rho, \omega$ ses coordonnées polaires. Comme on a: $OP = 1$,

$$\rho = OQ = \sin\theta$$

$$\omega = x_1OQ = \psi - \frac{\pi}{2}$$

car $OI$ étant perpendiculaire au plan $zOz_1$ est perpendiculaire à $OQ$.

L'équation de la trajectoire de $Q$ sera une relation entre $\rho$ et $\omega$, ou entre $\theta$ et $\psi$; or on a:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{f(u)}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1-u^2} \qquad \text{d'où:}$$

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{\beta - br_0 u}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}}$$

On en tirera $\psi$ en fonction de $u$ par une quadrature. En ~~posant~~ faisant :

$u = \sqrt{1-\rho^2}$ $\qquad \psi = \omega + \frac{\pi}{2}$

on aura l'équation de la trajectoire projetée sur le plan horizontal. On verrait aisément que cette courbe est tangente aux parallèles limites $C_1$, $C_2$, ou que sa projection est tangente aux cercles $C'_1$ $C'_2$ qui en sont les projections. On sait que, en appelant $V$ l'angle d'une courbe avec le rayon vecteur, on a :

$$tg\,V = \frac{\rho\,d\omega}{d\rho} = \frac{\sin\theta\,d\psi}{\cos\theta\,d\theta} = \frac{(1-u^2)\,d\psi}{-u\,du} = -\frac{\beta - br_0 u}{u\sqrt{f(u)}}$$

On voit que $tg\,V = \infty$ pour $u = u_1$, $u = u_2$ $\left\{\begin{array}{l} f(u_1)=0 \\ f(u_2)=0 \end{array}\right.$

Le rayon vecteur est normal à la courbe, donc elle est tangente au cercle en ce point, c.à.d. ~~aux~~ cercles extrêmes de rayon $\sin\theta_1$, $\sin\theta_2$.

Si l'une des racines (ce ne peut être que $u_2$) devient égale à $\frac{\beta}{br_0}$, le numérateur s'annule comme le dénominateur ; mais l'indétermination de $tg\,V$ n'est qu'apparente, car $\sqrt{u-u_2}$ reste en facteur au numérateur, et on a : $tg\,V = 0$ pour $u = u_2$.

Alors la trajectoire est tangente à son rayon vecteur, c'est à dire ~~perpendic~~ normale au cercle intérieur ; elle a un point de rebroussement sur le parallèle $C_2$. — Ce cas limite était facile à prévoir, en supposant que les boucles du 2e cas deviennent infiniment petites.

— On va voir que c'est précisément le cas d'une toupie dont la pointe est fine, et qu'on abandonne à elle-même après lui avoir

imprimé un mouvement de rotation autour de son axe $Oz$.

Si l'on maintenait l'axe $Oz$ fixe, la rotation continuerait à s'effectuer autour de cet axe, qui est un axe principal d'inertie relatif au centre de gravité. On sait que dans ce cas (3e cahier, page 126) les pressions sont les mêmes que dans le cas de l'équilibre; elles sont dues uniquement au poids. Si l'on abandonne alors l'axe $Oz$ à lui-même dans la position $\theta_0$, avec une rotation $r_0$ du corps autour de cet axe, on trouve que:
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = r_0$$

En effet, la rotation est la résultante des 3 composantes $\psi'$, $\theta'$, $\varphi'$ suivant $Oz_1$, $OI$, $Oz$; or, à l'instant initial, elle coïncide avec $Oz$; donc $\theta'_0 = 0$, $\psi'_0 = 0$, $\varphi'_0 = r_0$.

Posons: $u_0 = \cos\theta_0$ on a: $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = 0$ ou: $\beta - b r_0 u_0 = 0$

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0$ ou: $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = 0$ donc: $\alpha - a u_0 = 0$

relations qui déterminent les 2 constantes $\alpha$, $\beta$. On a alors:
$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (u_0 - u)\left[a(1-u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)\right]$$

Sous cette forme, la racine $u_0$ est mise en évidence; l'autre racine, $u_1$, vérifie l'équation: $a(1-u_1^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u_1) = 0$

d'où: $u_0 - u_1 = \frac{a(1-u_1^2)}{b^2 r_0^2}$ $\quad u_0 - u_1 > 0$ ou: $\theta_0 < \theta_1$.

Ainsi la position initiale de P est sur le cercle intérieur. Mais si la vitesse de rotation initiale $r_0$ est très-grande, $(u_0 - u_1)$ sera très-petit,

c.à.d. que $\theta_1$ sera très voisin de $\theta_0$ ; les 2 cônes sont très rapprochés.
L'axe de la toupie semblera décrire sensiblement un cône, et le point P un cercle. — Le sens de ~~cette~~ la rotation de P dépend du signe de :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{br_0(u_0-u)}{1-u^2} \qquad \text{or: } u_0-u>0 \quad \text{car: } u_0 \geq u \geq u_1.$$

Cette dérivée s'annule périodiquement pour $u=u_0$ ; elle a toujours le signe de $r_0$. Ainsi le sens de la rotation de $Oz$ autour de $Oz_1$ est celui de la rotation de la toupie autour de $OG$. La trajectoire de P a des points de rebroussement sur le cercle intérieur : on a :
$tg\, V = 0$ pour $u=u_0$, $\quad tg\, V = \infty$ pour $u=u_1$.
La position initiale est un point de rebroussement.

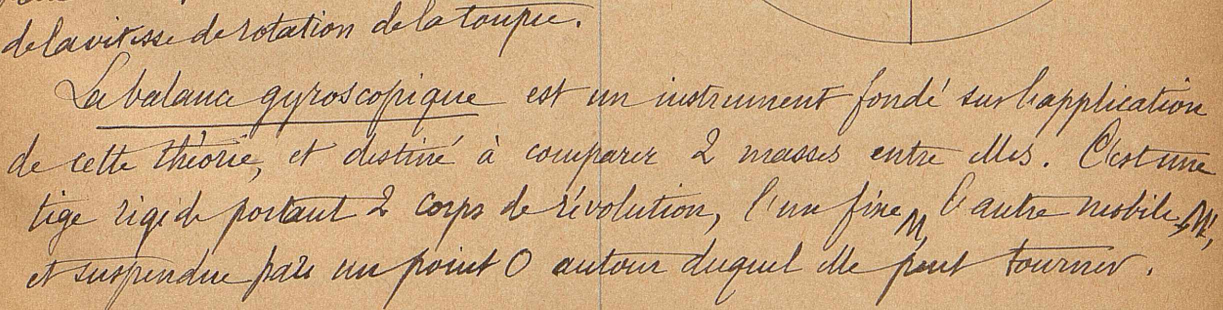
La vitesse de rotation du plan $zOz_1$, $\frac{d\psi}{dt}$, est très petite, car :

$$u_0 - u \leq u_0 - u_1$$

qui est très petit. On a donc :

$$\frac{d\psi}{dt} \leq \frac{a(1-u_1^2)}{br_0(1-u^2)}$$

qui est de l'ordre de : $\frac{a}{br_0}$.
Ainsi la vitesse de rotation du plan $zOz_1$ est en raison inverse de la vitesse de rotation de la toupie.



La balance gyroscopique est un instrument fondé sur l'application de cette théorie, et destiné à comparer 2 masses entre elles. C'est une tige rigide portant 2 corps de révolution, l'un fixe M, l'autre mobile M', et suspendue par un point O autour duquel elle peut tourner.

On suppose qu'on lui imprime une rotation initiale dans le sens positif autour de $OA$. Le plan $z_1OA$ tournera autour de la verticale $Oz_1$, de manière que $OG$ tourne dans le sens positif : le sens de cette rotation est donc positif ou négatif suivant que $G$, centre de gravité du système, se trouve sur $OM$ ou sur $OM'$. Donc pour savoir de quel côté du point de suspension se trouve $G$, il suffit de observer le sens de la rotation de $OA$ autour de $Oz_1$. Si en particulier $G$ se trouve précisément en $O$, la barre restera immobile : en effet, on est dans le cas d'un solide pesant suspendu par son centre de gravité, et comme son axe de révolution est axe principal d'inertie relatif à $G$, il est axe permanent de rotation. On aura donc équilibré les 2 masses $M$ et $M'$ quand on aura rendu la barre immobile.

— Dans le cas traité par Mme Kowalevski (v. page 25) on obtient aussi une 3e intégrale première, comme $r = r_0$ dans le cas de Lagrange, mais plus compliquée. L'auteur écrit d'abord les équations sous une forme plus symétrique en prenant pour inconnues : $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$. Le poids a pour projections sur les axes mobiles $Oxyz$ : $-Mg\gamma$, $-Mg\gamma'$, $-Mg\gamma''$. Ses moments par rapport aux 3 axes seront donc :

$$-Mg(\eta\gamma''-\zeta\gamma') \qquad -Mg(\zeta\gamma-\xi\gamma'') \qquad -Mg(\xi\gamma'-\eta\gamma)$$

et les équations d'Euler deviendront les suivantes :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = -Mg(\eta\gamma'' - \zeta\gamma')$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = -Mg(\zeta\gamma - \xi\gamma'')$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = -Mg(\xi\gamma' - \eta\gamma)$$

Imaginons le point P situé sur $Oz_1$ à l'unité de distance $OP=1$. Ce point est fixe dans l'espace absolu; il a donc un mouvement relatif par rapport aux axes mobiles Oxyz. Les coordonnées relatives sont $\gamma, \gamma', \gamma''$; sa vitesse relative a pour projections:

$\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma'}{dt}, \frac{d\gamma''}{dt}$ sur les axes mobiles; sa vitesse d'entraînement est due à la rotation du point coïncidant; elle a pour projections: $q\gamma'' - r\gamma'$, $r\gamma - p\gamma''$, $p\gamma' - q\gamma$.

Écrivons que sa vitesse absolue est nulle, c.à.d. que sa vitesse relative est égale et opposée à sa vitesse d'entraînement:

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'$$

On a ainsi 6 équations simultanées du 1er ordre définissant $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ en fonction du temps. — On peut retrouver les 2 intégrales premières connues par des combinaisons simples: l'intégrale des forces vives, en multipliant les 3 premières équations respectivement par $p, q, r$ et ajoutant:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -Mg(\xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta\gamma'') + h = -Mg\zeta_1 + h$$

l'intégrale des moments des quantités de mouvement, en multipliant les mêmes équations respectivement par $\gamma, \gamma', \gamma''$ et ajoutant:

$$\frac{d}{dt}(Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'') = 0 \qquad Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C^{te}$$

On a enfin une intégrale première évidente en multipliant les 3 dernières

équations par $\gamma, \gamma', \gamma''$ et ajoutant :

$$\gamma \frac{d\gamma}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} = 0 \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Ces résultats sont généraux. Appliquons maintenant les données particulières du problème : $A = B = 2C \qquad \zeta = 0$.
Comme toutes les droites passant par O dans le plan de l'équateur xOy sont axes principaux d'inertie, prenons pour Ox la dr. OG, puisque G est situé dans ce plan : on aura donc $\eta = 0$.
Les équations précédentes deviennent alors :

$$2\frac{dp}{dt} = qr \qquad 2\frac{dq}{dt} = -pr + K\gamma'' \qquad \frac{dr}{dt} = -K\gamma'$$

en posant $K = \frac{Mg\xi}{C}$ constante donnée.
Multiplions la 2e équation par $i$ et ajoutons-la à la 1e :

$$2\frac{d}{dt}(p+iq) = -ri(p+iq) + iK\gamma''$$

Effectuons une combinaison analogue sur les équations du 2e groupe :

$$\frac{d}{dt}(\gamma + i\gamma') = -ri(\gamma + i\gamma') + i\gamma''(p+iq)$$

Eliminons $\gamma''$ entre ces 2 équations ; il vient :

$$\frac{d}{dt}\left[(p+iq)^2 - K(\gamma+i\gamma')\right] = -ri\left[(p+iq)^2 - K(\gamma+i\gamma')\right]$$

ou $$D\log\left[(p+iq)^2 - K(\gamma+i\gamma')\right] = -ri$$

On aurait obtenu une relation toute semblable en employant $-i$ au lieu de $+i$ ; on a donc aussi : $D\log\left[(p-iq)^2 - K(\gamma - i\gamma')\right] = +ri$.
Ajoutons : $$D\log\left[(p+iq)^2 - K(\gamma+i\gamma')\right] + D\log\left[(p-iq)^2 - K(\gamma-i\gamma')\right] = 0$$
d'où : $$\left[(p+iq)^2 - K(\gamma+i\gamma')\right] \times \left[(p-iq)^2 - K(\gamma-i\gamma')\right] = C^{te}$$

On a ainsi une intégrale première algébrique du 2e degré, dont le 1er membre est réel. Par des calculs assez longs, on ramène le problème à des quadratures.

— Mouvement d'un corps solide entièrement libre

La position d'un corps solide entièrement libre dépend de 6 paramètres, par exemple : les coordonnées $\xi, \eta, \zeta$ du centre de gravité, et les 3 angles d'Euler $\theta, \varphi, \psi$.

Soient 3 axes fixes $O\xi\eta\zeta$ auxquels est rapporté le mouvement du centre de gravité G : 3 axes parallèles aux axes fixes et issus de G, $G x_1 y_1 z_1$ ; enfin 3 axes invariablement liés au corps, à savoir les 3 axes principaux d'inertie $Gxyz$.



Le théorème du mouvement du centre de gravité fournit 3 équations ; soient $X, Y, Z$ les projections de chaque force extérieure sur les axes fixes $O\xi\eta\zeta$ ; on aura :

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z$$

On peut appliquer le théorème des moments des quantités de mouvement au mouvement relatif par rapport aux axes $G, x_1 y_1 z_1$ ; or ce mouvement est celui d'un corps solide ayant un point fixe, et les équations de ce mouvement relatif seront les mêmes que s'il était absolu, car on a obtenu les équations d'Euler en appliquant

le théorème des moments des quantités de mouvement. On a donc les 3 équations du mouvement relatif :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = \Sigma(yZ - zY)$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = \Sigma(zX - xZ)$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = \Sigma(xY - yX)$$

Telles sont les 6 équations du mouvement ; on remplacera $p, q, r$ par leurs expressions en fonction de $\theta, \varphi, \psi$ et de leurs dérivées ; on aura ainsi 6 équations du 2e ordre en $\xi, \eta, \zeta$, $\theta, \varphi, \psi$.

Elles sont simultanées et devront en général être intégrées ensemble car $\theta, \varphi, \psi$ peuvent figurer dans le 1er groupe, et $\xi, \eta, \zeta$ dans le 2e. Les intégrales générales contiendront 12 constantes arbitraires qu'on déterminera par les conditions initiales, connaissant les valeurs initiales des 6 inconnues et de leurs dérivées.

— Cas d'un corps pesant dans le vide.

On peut intégrer à part les 3 équations du mouvement du centre de gravité : en effet, $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = -Mg$.
Le centre de gravité se meut comme un point matériel pesant ; il décrit donc une parabole d'axe vertical.
Les seconds membres des équations du mouvement relatif sont nuls ; on a donc le système connu :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = 0$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0$$

Ce sont les équations du mouvement d'un corps uniquement pesant suspendu par son centre de gravité. Le mouvement relatif du corps autour de son centre de gravité pourra donc se représenter par la méthode géométrique de Poinsot. Le mouvement total est connu.

## Mouvement d'une toupie libre sur un plan horizontal.

Soit G le centre de gravité de la toupie dont la pointe P repose sur le plan horizontal $O\xi\eta$. Les forces extérieures sont le poids Mg appliqué en G, et la réaction Q du plan appliquée en P; elle est normale, car on suppose qu'il n'y a pas de frottement. Les équations du mouvement du centre de gravité sont:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=0 \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2}=0$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-Mg+Q$$

Cette dernière équation servira à calculer la réaction normale. Les 2 autres montrent que $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ sont constantes, c.à.d. que la projection horizontale de G a un mouvement rectiligne uniforme. Soit G' sa projection sur le plan $O\xi\eta$; menons par ce point de nouveaux axes: $G'\xi'\eta'\zeta'$,

parallèles aux axes fixes. Les équations du mouvement relatif par rapport à ces axes seront les mêmes que celles du mouvement étudié dans ces axes supposés fixes car, puisque leur mouvement est une translation rectiligne et uniforme, il n'y a ni force centrifuge ni force centrifuge composée. Tout revient donc à étudier le mouvement de la toupie dans les axes fixes $O\xi\eta\zeta$, en supposant seulement que G reste constamment sur la verticale $O\zeta$, c.à.d. qu'à l'instant initial

$$\frac{d\xi}{dt}=0 \qquad \frac{d\eta}{dt}=0 \qquad \xi=0 \qquad \eta=0.$$

de sorte que G ne fait que monter et descendre sur $O\zeta$. Soit :

$$PG=l\,; \qquad \zeta=l\cos\theta. \qquad \theta=zGz_1.$$

Menons, comme toujours, les axes $Gx_1y_1z_1$ parallèles aux axes fixes, et les axes $Gxyz$ fixes au corps, $Gz$ étant l'axe de révolution de la toupie et de son ellipsoïde d'inertie, et conséquemment axe principal d'inertie relatif à G. — Appliquons le théorème des forces vives ; la vitesse du centre de gravité est $\frac{d\zeta}{dt}$ ; la force vive du corps dans sa rotation instantanée autour du centre de gravité est, comme on sait,

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2$$

on a donc l'équation :

$$d\,\frac{1}{2}\left[M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2+Ap^2+Bq^2+Cr^2\right]=-Mg\,d\zeta$$

d'où l'on tire une intégrale première du mouvement.

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement à l'axe vertical $Gz_1$ ou $O\zeta$ : La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est (page 24) : $Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''$

On a donc l'intégrale première : $Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=C^{te}$

ou : $$Ap\sin\theta\sin\varphi+Bq\sin\theta\cos\varphi+Cr\cos\theta=C^{te}$$

On tire une 3e intégrale première de la 3e équation d'Euler :

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=N \qquad \text{Or :} \quad B=A \qquad N=0.$$

Donc : $\frac{dr}{dt}=0 \qquad r=r_0$

Portons cette valeur dans l'intégrale des forces vives :

$$p^2+q^2+\frac{M}{A}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=\alpha-a\cos\theta \qquad \alpha=\frac{C}{A}r_0^2+h$$

$\alpha$ constante arbitraire, $a$ constante numérique : $a=\frac{Mg}{A}l$.

De même, l'intégrale des moments devient :

$$\sin\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=\beta-br_0\cos\theta$$

$\beta$ constante arbitraire, $b$ constante numérique.

Ces équations ne diffèrent de celles de la toupie à pointe fixe (page 25) que par le terme : $\frac{M}{A}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$ qui figure dans la première, et qu'on peut écrire : $c^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ en posant : $c^2=\frac{M}{A}l^2$.

Remplaçons $p$, $q$ par leurs expressions en $\theta$ et $\psi$ ; il vient :

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+c^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\alpha-a\cos\theta$$

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}=\beta-br_0\cos\theta$$

Ces 2 équations déterminent $\theta$ et $\psi$. On tirera $\frac{d\psi}{dt}$ de la 2e et on le portera dans la 1e ; on aura une équation en : $\cos\theta=u$ :

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2\left[1+c^2(1-u^2)\right]=f(u) \qquad f \text{ polynôme du 3e degré :}$$

$$=(\alpha-au)(1-u^2)-(\beta-br_0u)^2$$

d'où l'on tirera $t$ par une quadrature en fonction de $u$. La discussion du problème sera la même que dans le cas de la pointe fixe,

puisque le polynôme $f(u)$ est le même et que d'ailleurs le coefficient de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ est essentiellement positif. On trouvera donc que l'angle $\theta$ varie entre 2 limites fixes, et que la pointe P décrit une courbe qui va toucher alternativement 2 cercles de centre O dans le plan $O\xi\eta$ - Cette courbe aura, suivant les cas, un cours ordinaire, ou des points doubles, ou des points de rebroussement.

— Mouvement d'une bille de billard, en tenant compte du frottement.

Définissons brièvement le frottement que nous rencontrons pour la première fois - Considérons 2 corps solides S, S' en contact par les 2 points A, A', et glissant l'un sur l'autre - On dit qu'il y a frottement de glissement quand la réaction des 2 corps l'un sur l'autre n'est pas normale, mais oblique au plan tangent commun. On la décompose alors en 2 forces, l'une normale AP, qu'on convient à appeler réaction normale, l'autre tangentielle AF, qu'on appelle force de frottement.



Les lois théoriques du frottement, qui représentent par une première approximation ce qui se passe dans la réalité, sont les suivantes: la force de frottement est dirigée en sens contraire de la vitesse relative du point A, le corps S' étant considéré comme fixe. De plus, sa grandeur est indépendante de cette vitesse, et proportionnelle à la composante normale de la réaction, c.à.d. à la pression:

$$F = fP \qquad f = \text{coefficient de frottement};$$

c'est un coefficient numérique qui dépend de la nature des surfaces mises

en contact. — Cela revient à dire que l'angle $\widehat{QAF} = \alpha$ est constant ;

car : $P = F\,tg\,\alpha$ ; d'où : $1 = f\,tg\,\alpha$

Le coefficient de frottement est nul quand la réaction est normale.

Revenons au problème proposé.

Supposons qu'une sphère pesante homogène, de rayon $\underline{a}$, puisse rouler et glisser sur un plan horizontal $O\xi\eta$ ; soit A le point de contact. Les forces extérieures sont : le poids $Mg$ appliqué au centre G ; la réaction normale AP, et la force de frottement AF, dont la grandeur est : $F = fP$

et la direction est contraire à celle de la vitesse du point A. Soient X, Y les projections de cette force F ; les équations du mouvement du centre de gravité seront :

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = X \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -Mg + P$$

Or $\zeta$ est constant, $\zeta = a$ ; donc : $0 = -Mg + P$

d'où l'on tire la réaction normale : $P = Mg$

La réaction normale est constamment égale au poids, comme dans le cas de l'équilibre. Il en résulte que F est constante en grandeur.

Dans une sphère homogène, tous les diamètres sont axes principaux d'inertie, on peut donc écrire les équations du mouvement relatif par rapport à des axes de directions fixes, par exemple $Gxyz$ parallèles à $O\xi\eta\zeta$.

Le mouvement relatif est celui d'un corps ayant un point fixe à l'origine G : soient $p, q, r$ les projections de la rotation instantanée. Un point quelconque $M$ de la sphère aura une vitesse absolue $V$ qui est la somme de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative : Les projections de sa vitesse relative (dans la rotation $p, q, r$) sont :

$$V_{r_x} = qz - ry \qquad V_{r_y} = rx - pz \qquad V_{r_z} = py - qx$$

La vitesse d'entraînement est la translation du point G ; son moment est nul. La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à Gz est donc : $\Sigma m\left[x(rx - pz) - y(qz - ry)\right] = \Sigma mr(x^2 + y^2) = Mk^2 r$

$Mk^2$ étant le moment d'inertie de la sphère par rapport à un de ses diamètres ; on sait que : $k^2 = \frac{2}{5} a^2$.

La somme des moments des forces extérieures par rapport à Gz étant nulle, on a l'équation : $Mk^2 \frac{dr}{dt} = 0$ d'où : $r = r_0$

On a de même : $Mk^2 \frac{dp}{dt} = aY$ $\qquad Mk^2 \frac{dq}{dt} = -aX$

Ces équations sont générales, quelle que soit la force F.

Calculons les 2 composantes horizontales de la vitesse absolue de A ; soient $u, v$ suivant $O\xi$, $O\eta$. On connaît les projections de la vitesse relative pour un point quelconque ; il suffit d'y faire :

$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -a.$ La vitesse d'entraînement est celle de G ; on a donc : $u = \frac{d\xi}{dt} - qa \qquad v = \frac{d\eta}{dt} + pa$

On vérifie que la 3e composante est nulle, ce qui était évident.

La force F étant dirigée en sens contraire de la vitesse absolue de A, on doit avoir :

$$\frac{X}{Y} = \frac{u}{v}.$$

et $X, Y$ doivent être de signes contraires à $u, v$.

On va prouver que la vitesse $(u, v)$ est constante en direction

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - a\frac{dq}{dt} = \frac{X}{M} + a^2\frac{X}{Mk^2} = \frac{X}{M}\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + a\frac{dp}{dt} = \frac{Y}{M} + a^2\frac{Y}{Mk^2} = \frac{Y}{M}\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)$$

D'où : $\quad \frac{du}{dv} = \frac{X}{Y} = \frac{u}{v} \qquad \frac{du}{u} = \frac{dv}{v} \qquad \frac{u}{v} = C^{te}$

La direction de la vitesse du point A est constante ; donc la force de frottement F est constante en grandeur et en direction, c'à d. que X, Y sont des constantes.

On peut alors intégrer les 2 premières équations du mouvement du centre de gravité ; on voit qu'il se meut comme un point matériel sollicité par une force constante : il décrit donc une parabole dans le plan horizontal : $\quad \zeta = a$.

La vitesse du point A diminue constamment, car $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ sont du même signe que X, Y, qui sont de signe contraire à $u, v$ ; donc $u$ et $v$ décroissent en valeur absolue. D'ailleurs $u$ et $v$ varient proportionnellement au temps, donc s'annulent au bout d'un temps fini, et en même temps, puisque leur rapport est constant. Mais dès que la vitesse du point de contact A est nulle, il n'y a plus glissement, mais roulement, et ce roulement est stable, car si le point de contact venait à glisser si peu que ce soit, le frottement tendrait à détruire sa vitesse.

Il y a donc 2 phases bien distinctes dans le mouvement de la bille : une période de glissement pendant laquelle le frottement est constant, et la vitesse du point de contact, constante en direction, diminue jusqu'à s'annuler ; et une période de roulement, pendant laquelle le frottement

de glissement est nul (pour être exact, il faudrait tenir compte du frottement de roulement, beaucoup plus faible) X et Y étant nulles, le centre de gravité prend un mouvement rectiligne uniforme; p et q deviennent constantes comme r. La trajectoire du centre de gravité est donc un arc de parabole jusqu'au point où la vitesse de A s'annule, et à partir de ce point la tangente à la parabole.

Coriolis a démontré que si l'on considère un point $\pi$ situé sur la verticale du centre de la bille à $\frac{2}{5}$ de rayon au-dessus de G, c.à.d. $\zeta = a + \frac{k^2}{a}$, le point de la bille qui passe à chaque instant par ce point a une vitesse constante en grandeur et direction : on obtiendrait ce résultat en éliminant X, Y entre les 4 équations précédentes. — On en conclut que la vitesse finale du centre de gravité dans le mouvement de roulement est parallèle à la vitesse du point $\pi$, et égale aux $\frac{5}{7}$ de cette vitesse, de sorte que l'on connaîtrait la vitesse finale de la bille si l'on connaissait la vitesse initiale du point $\pi$.

# Principe de D'Alembert.

Le principe de D'Alembert permet de ramener les problèmes de la dynamique à des problèmes de statique, et d'écrire les équations du mouvement comme des équations d'équilibre, au moyen du principe des vitesses virtuelles.

Soit un point matériel de masse $m$ soumis à des forces données $(F, F', F'', \dots)$ dont les projections sur les axes sont $X, Y, Z$; les équations du mouvement de ce point sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z$$

Ecrivons-les sous la forme suivante :

$$\Sigma X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \Sigma Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \Sigma Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Si l'on considère le vecteur $MI$ issu de $M$ et ayant pour projections : $-m\frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad -m\frac{d^2y}{dt^2}$ $\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$,

les équations précédentes expriment que la somme géométrique des vecteurs $MI, MF, MF', MF'', \dots$ est nulle. Ce vecteur $MI$ s'appelle la force d'inertie du point $M$; c'est une force purement fictive.

Les équations du mouvement d'un point expriment donc qu'il y a, à chaque instant, équilibre entre la force d'inertie et les forces directement appliquées.

On peut constater l'existence de cette force fictive de la manière suivante : supposons connue la trajectoire que le point $M$ décrirait s'il était abandonné à lui-même et soumis aux forces données. Supprimons ensuite ces forces et faisons-lui décrire la même

trajectoire : on devra à chaque instant lui appliquer une force égale à la résultante des forces données ; en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, le point exercera sur la main qui le conduit une réaction égale et directement opposée à cette résultante, c.à.d précisément la force $MI$, qui représente en quelque sorte sa résistance au mouvement qu'on lui impose. Seulement il faut remarquer que cette force de réaction $MI$ est appliquée à la main, et non au point, qui est sollicité par une force égale et opposée, c'est pourquoi on sent à la main cette réaction ; mais, considérée comme appliquée au point, cette force d'inertie est toute fictive.

– Considérons maintenant un système de points de masses $m_1\, m_2 \ldots m_n$ ~~soumis~~ sollicités respectivement par des forces résultantes $F_1\, F_2 \ldots F_n$, et soumis, de plus, à des liaisons qui peuvent dépendre du temps, et qui s'expriment par des relations données entre leurs coordonnées et le temps. Le point $M_p$, par exemple, peut être considéré comme libre sous l'action de la force donnée $F_p$ et des forces de liaison $F_p'$, $F_p''$, .... En vertu du principe de D'Alembert, il y a à chaque instant équilibre entre la force directement appliquée, les forces de liaison et la force d'inertie du point. – En appliquant le même principe à tous les points du système, on trouvera que le système tout entier est en équilibre sous l'action des forces données, des forces de liaison et des forces d'inertie des différents points.

Si l'on applique maintenant le principe des vitesses virtuelles, et qu'on imprime au système un déplacement virtuel compatible avec les liaisons à l'instant $t$, la somme des travaux virtuels des forces de liaison sera nulle. Il suffira donc d'écrire que la somme des travaux virtuels

des forces données et des forces d'inertie est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons. On aura ainsi l'équation générale de la dynamique sous la même forme que l'équation générale de la statique.

Soient $\delta x_p$, $\delta y_p$, $\delta z_p$ les projections du déplacement virtuel imprimé au point $M_p$. Le travail de la force donnée $F_p$ sera:

$$X_p \delta x_p + Y_p \delta y_p + Z_p \delta z_p$$

Le travail de la force d'inertie $I_p$ sera:

$$-m_p \frac{d^2x_p}{dt^2}\delta x_p - m_p \frac{d^2y_p}{dt^2}\delta y_p - m_p \frac{d^2z_p}{dt^2}\delta z_p$$

En faisant la somme de ces travaux virtuels pour tous les points du système, on aura l'équation générale:

$$(S)\quad \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

qui devra être vérifiée par tous les déplacements compatibles avec les liaisons. On obtiendra les équations du mouvement en exprimant analytiquement cette condition: cela peut se faire de plusieurs manières.

Méthode des multiplicateurs indéterminés de Lagrange

Supposons que les liaisons soient représentées par les équations:

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1 y_1 z_1\ x_2 y_2 z_2 \ldots x_n y_n z_n\ t) = 0 \\ f_2(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_n y_n z_n\ t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_h(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_n y_n z_n\ t) = 0 \end{cases}$$

au nombre de $h$: on a: $h < 3n$, car si: $h = 3n$,

on en tirerait les $3n$ coordonnées en fonction du temps, et le mouvement serait déterminé par les liaisons. Posons: $h = 3n - k$
La position du système dépendra de $k$ paramètres, ou le système aura $k$ degrés de liberté.

Pour obtenir les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons qui existent à l'instant $t$, on devra différentier les équations (1) en laissant $t$ constant: car pour que le travail des forces de liaison soit nul, c.à.d pour que ces forces disparaissent de l'équation générale, il faut que les liaisons auxquelles est soumis le déplacement virtuel soient indépendantes du temps (de sorte que ce déplacement soit normal aux forces de liaison). (v. 3e cahier, pages 45, 50.) On aura donc les relations linéaires homogènes suivantes entre les $3n$ variations des coordonnées correspondant à un déplacement virtuel:

$$(2)\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\delta x_n + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\delta y_n + \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \dots\dots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_h}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_h}{\partial z_1}\delta z_1 + \dots\dots + \frac{\partial f_h}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \end{cases}$$

Il faut écrire que l'équation (S) est vérifiée par tous les déplacements virtuels qui satisfont le système d'équations (2). Cette équation (S) est l'équation générale de la statique, où l'on a remplacé $X$ par $\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $Y$ par $\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $Z$ par $\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)$.
– On peut prendre arbitrairement les variations de $k$ coordonnées; les équations (2) donneront alors les $h$ autres en fonction des $k$ premières

On résoudra donc le système (2) par rapport aux $h$ variations dépendantes, et on portera leurs expressions dans l'équation (S); celle-ci deviendra une relation entre les $K$ variations indépendantes.

– Pour plus de symétrie, on multiplie les équations (2) respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_h$, et on les ajoute à l'équation (S). On aura ainsi :

$$\sum_1^n \left( X_p - m_p \frac{d^2x_p}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta x_p} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta x_p} + \ldots\ldots + \lambda_h \frac{\delta f_h}{\delta x_p} \right) \delta x_p$$

$$+ \sum_1^n \left( Y_p - m_p \frac{d^2y_p}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta y_p} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta y_p} + \ldots\ldots + \lambda_h \frac{\delta f_h}{\delta y_p} \right) \delta y_p$$

$$+ \sum_1^n \left( Z_p - m_p \frac{d^2z_p}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta z_p} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta z_p} + \ldots\ldots + \lambda_h \frac{\delta f_h}{\delta z_p} \right) \delta z_p = 0$$

équation qui doit être vérifiée quelles que soient les valeurs des coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_h$ et des $K$ variations indépendantes. On pourra disposer de $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_h$ de manière à annuler les coefficients des $\underline{h}$ variations dépendantes dans l'équation précédente; il restera $K$ variations arbitraires, et pour que le reste de l'équation soit identiquement nul quelles que soient ces variations, il faut que les $K$ coefficients soient nuls. On devra donc égaler à zéro tous les coefficients, et on aura les $(h + K)$ équations suivantes :

$$(3) \begin{cases} m_p \dfrac{d^2x_p}{dt^2} = X_p + \lambda_1 \dfrac{\delta f_1}{\delta x_p} + \lambda_2 \dfrac{\delta f_2}{\delta x_p} + \ldots\ldots + \lambda_h \dfrac{\delta f_h}{\delta x_p} \\ m_p \dfrac{d^2y_p}{dt^2} = Y_p + \lambda_1 \dfrac{\delta f_1}{\delta y_p} + \lambda_2 \dfrac{\delta f_2}{\delta y_p} + \ldots\ldots + \lambda_h \dfrac{\delta f_h}{\delta y_p} \\ m_p \dfrac{d^2z_p}{dt^2} = Z_p + \lambda_1 \dfrac{\delta f_1}{\delta z_p} + \lambda_2 \dfrac{\delta f_2}{\delta z_p} + \ldots\ldots + \lambda_h \dfrac{\delta f_h}{\delta z_p} \end{cases}$$

$$(p = 1, 2, \ldots\ldots n.)$$

soit $3n$ équations du mouvement qui, jointes aux $h$ équations de liaison (2) déterminent les $3n$ coordonnées et les $h$ multiplicateurs $\lambda$ en fonction du temps.

Il est aisé d'interpréter les facteurs indéterminés $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_h$.

On ne changerait évidemment rien aux équations (3) en supprimant la liaison : $f_1 = 0$, et en ajoutant aux forces données la force qui a pour projections : $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_p}$, $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_p}$, $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_p}$

Cette force représente l'effet de la liaison exprimée par l'équation : $f_1 = 0$ ; c'est la force de liaison correspondante. On voit qu'elle est normale à la surface qui aurait pour équation : $f_1 = 0$, à condition d'attribuer des valeurs constantes à $t$ et aux $(3n-3)$ coordonnées autres que $x_p$, $y_p$, $z_p$.

La méthode précédente est inapplicable dès que $h$ est un peu considérable, à cause du nombre d'équations et de termes qu'on est obligé d'écrire. — Mais elle fournit des résultats intéressants dans certains cas particuliers relativement simples.

— Supposons que les liaisons permettent une translation d'ensemble du système parallèlement à un axe, $Ox$ par exemple, c.à.d. que les équations de liaison (1) ne cessent pas d'être vérifiées quand on donne à tous les $x$ un même accroissement. — Dans l'équation générale (S) $\delta y$ et $\delta z$ deviennent nuls ; $\delta x$ étant le même pour tous les points se met en facteur et disparaît ; il reste :

$$\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 \qquad \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma X. \text{ d'où :}$$

<u>Théorème</u> : Quand les liaisons admettent une translation du système

parallèlement à un axe, la dérivée par rapport au temps de la projection sur cet axe de la somme des quantités de mouvement est égale à la somme des projections sur cet axe des forces directement appliquées.

C'est un cas particulier du théorème des projections des quantités de mouvement : en effet, ce théorème général s'applique à toutes les forces extérieures y compris les forces de liaison, tandis que celui-ci, dont l'hypothèse est plus restreinte, ne s'applique qu'aux forces directement appliquées ; les forces de liaison se trouvent éliminées.

Et en effet elles disparaîtraient des formules si l'on appliquait le théorème général. Concevons par exemple un système de points assujettis à se mouvoir sur des surfaces cylindriques parallèles à $Ox$ ; un tel système est susceptible d'une translation parallèle à $Ox$. En vertu du théorème général appliqué à $Ox$, on devra faire figurer dans le 2e membre les forces de liaison, c. à d. les réactions normales mais comme leurs projections sur $Ox$ sont nulles, elles disparaissent.

— Supposons que les liaisons permettent au système de tourner en bloc autour d'un axe, $Oz$ par exemple. Dans ce déplacement virtuel compatible avec les liaisons, tous les points tournent de $\delta\theta$ :

$$\delta x = -y\,\delta\theta \qquad \delta y = x\,\delta\theta \qquad \delta z = 0$$

$\delta\theta$ étant le même pour tous les points disparaît comme facteur, et l'équation (S) devient : $\sum\left[-y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) + x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = 0$

ou : $$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \sum\left(xY - yX\right)$$

Théorème : Quand les liaisons admettent une rotation du système

autour d'un axe, la dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est égale à la somme des moments des forces directement appliquées par rapport au même axe.

C'est un cas particulier du théorème des moments des quantités de mouvement, car il n'est vrai que dans une hypothèse restreinte ; en revanche, tandis que le théorème général s'applique à toutes les forces extérieures, celui-ci ne s'applique qu'aux forces directement appliquées. Ici encore les forces de liaison se trouvent éliminées, grâce à l'hypothèse particulière ; d'ailleurs, elles disparaîtraient des formules si l'on appliquait le théorème général : on verrait qu'elles ont des moments nuls par rapport à l'axe de rotation.

– Supposons enfin les liaisons indépendantes du temps. Dans ce cas, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons à l'instant $t$ comprennent le déplacement réel, qui correspond à l'accroissement de temps $dt$. En effet, les équations (1) ne contenant plus le temps, leurs différentielles ne contiendront plus $dt$ et se confondront avec les équations (2) qui unissent les déplacements virtuels : on pourra identifier $\delta x_1$ et $dx_1$, $\delta y_1$ et $dy_1$, $\delta z_1$ et $dz_1$, etc. L'équation générale (S) sera vraie en particulier pour le déplacement réel $(dx, dy, dz)$ :

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right] = 0 \quad \text{ou :}$$

$$\Sigma m\left[\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right] = d\,\Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

<u>Théorème</u> : Si les liaisons sont indépendantes du temps, la différentielle de la demi-force vive totale du système est égale à la somme des travaux élémentaires des forces directement appliquées.

C'est un cas particulier du théorème des forces vives: en effet, ce théorème, dans sa généralité, s'applique aux forces extérieures et intérieures, c.à.d. aux forces directement appliquées et aux forces de liaison. – Mais on sait que, quand les liaisons sont indépendantes du temps, la somme des travaux élémentaires des forces de liaison est nulle; donc le théorème des forces vives se réduit dans ce cas à l'énoncé précédent.

On arriverait à la même conclusion par un calcul direct; revenons aux équations du mouvement:

$$\sum_1^n \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots\cdots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \cdots\cdots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots\cdots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Effectuons sur ces équations la combinaison des forces vives; il vient:

$$d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) - \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} + \cdots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial t}\right) dt$$

car en différentiant les équations (1) dans le cas général, on trouve:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} dz_n\right] + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt = 0.$$

Dans le cas particulier où les liaisons ne dépendent pas du temps, $\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t}, \ldots \frac{\partial f_h}{\partial t}$ sont nulles, et la formule se réduit à:

$$d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

qui exprime le théorème énoncé. – On peut encore, en introduisant dès le début cette hypothèse, remarquer que le coefficient de $\lambda_1$ est:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} dz_n = df_1 = 0.$$

— Nous allons maintenant exposer la méthode, due à Lagrange, qui permet de réduire au minimum (K) le nombre des équations du mouvement. — Pour cela, on exprime le déplacement du système au moyen de K paramètres géométriquement indépendants.

On a h équations de liaison entre les 3n coordonnées; on pourrait les résoudre par rapport à h d'entre elles, qu'on exprimerait ainsi en fonction des K autres. Pour conserver la symétrie, il vaut mieux exprimer les 3n coordonnées en fonction de K nouveaux paramètres, qu'on choisira parmi les quantités géométriques de façon à avoir les relations les plus simples.

Analytiquement, et pour donner aux calculs la plus grande généralité, on ajoutera aux h équations de liaison K équations de la forme:

$$f_{h+1}(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_n y_n z_n) = q_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{h+K}(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_n y_n z_n) = q_K$$

On aura ainsi $h + K = 3n$ équations, d'où l'on tirera les $3n$ coordonnées en fonction de $q_1 q_2 \ldots q_K$ et de $t$, comme suit:

$$\sum_1^n \begin{cases} x_1 = \varphi_1(q_1 q_2 \ldots q_K\, t) \\ y_1 = \psi_1(q_1 q_2 \ldots q_K\, t) \\ z_1 = \varpi_1(q_1 q_2 \ldots q_K\, t) \end{cases}$$

Nous avons supposé que les équations de liaison (1) n'établissent aucune relation entre les K paramètres; et en effet, si l'on substitue à $x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n$ dans ces équations les expressions précédentes, elles seront vérifiées identiquement quels que soient $q_1 q_2 \ldots q_K$.

Il s'ensuit que pour avoir un déplacement compatible avec les

liaisons à l'instant $t$, il suffit de donner à $q_1 q_2 \ldots q_k$ des variations arbitraires, en laissant $t$ constant. Les variations correspondantes des coordonnées seront :

$$\sum_1^n \begin{cases} \delta x_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta y_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta z_1 = \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \varpi_k}{\partial q_k}\delta q_k \end{cases}$$

On portera ces expressions dans l'équation générale de la dynamique :

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

où l'on aura remplacé $x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n\, y_n\, z_n$ par leurs expressions en fonction de $q_1 q_2 \ldots q_k\, t$, et l'on aura, en posant :

$$Q_1 = \Sigma\left(X\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\right)$$

$$P_1 = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\right)$$

l'équation nouvelle :

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k = P_1\delta q_1 + P_2\delta q_2 + \ldots + P_k\delta q_k$$

qui devra être vérifiée identiquement quels que soient les accroissements arbitraires $\delta q_1\, \delta q_2 \ldots \delta q_k$, ce qui exige qu'on ait :

$P_1 = Q_1 \qquad P_2 = Q_2 \qquad - - - - - - - \qquad P_k = Q_k$

Telles seront les $k$ équations du mouvement, qui détermineront $q_1 q_2 \ldots q_k$ en fonction du temps, puisque les $P$ et les $Q$ sont des fonctions de $q_1 q_2 \ldots q_k$ et $t$.

On va transformer les $P$ par la méthode de Lagrange, la même qui a servi à former les équations du mouvement d'un point matériel. On désignera par des accents les dérivées par rapport à $\underline{t}$.

$$P_1 = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\right) - \Sigma m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\right)\right]$$

Or : $x' = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q_2' + \dots\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}q_k' + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$

Donc : $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q_1'}$ De même : $\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = \frac{\partial y'}{\partial q_1'}$ $\frac{\partial\varpi}{\partial q_1} = \frac{\partial z'}{\partial q_1'}$

D'autre part on a identiquement : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial x'}{\partial q_1}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}q_1' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_2}q_2' + \dots\dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_k}q_k' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial t}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}q_1' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_2}q_2' + \dots\dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_k}q_k' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial t}$$

De même : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial y'}{\partial q_1}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial z'}{\partial q_1}$ Donc :

$$P_1 = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1'} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1'} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1'}\right) - \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right).$$

Posons, comme toujours : $\frac{1}{2}\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2) = T$.

C'est la demi force vive totale du système. En y remplaçant $x', y', z'$ par leurs expressions, $T$ devient une fonction de $q_1\, q_2 \dots q_k,\ q_1'\, q_2' \dots q_k',\ t$, du 2e degré en $q_1'\, q_2' \dots q_k'$. Alors on peut écrire :

$$P_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}$$

De même $P_2, P_3, \dots P_k$.

Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

soit $K$ équations différentielles du 2e ordre définissant $q_1 q_2 \ldots q_k$ en fonction de $t$. Elles sont linéaires en $q_1'', q_2'', \ldots\ldots q_k''$.

On sait comment on peut calculer les seconds membres $Q$ : si on imprime au système un déplacement virtuel compatible avec les liaisons à l'instant $t$, en laissant $t$ constant, on a la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées :

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k$$

Pour avoir séparément $Q_1$, il suffit d'imprimer au système le déplacement $\delta q_1$ en faisant $q_2 q_3 \ldots q_k$ et $t$ constants. Le travail virtuel des forces données sera $Q_1 \delta q_1$, d'où l'on tire $Q_1$ ; et de même pour $Q_2 \ldots\ldots Q_k$.

Ces seconds membres se calculent plus simplement encore quand il existe une fonction des forces directement appliquées, ou même quand $XYZ$ sont les dérivées partielles par rapport à $x, y, z$, d'une fonction $U$ qui peut contenir le temps :

$$dU = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + \ldots\ldots + Z_n dz_n + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

On a alors : $\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta U$

c.à.d. la variation de $U$ dans un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, parce que $t$ reste constant. — Si l'on exprime $U$ au moyen de $q_1 q_2 \ldots\ldots q_k$ $t$, on aura :

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots\ldots + Q_k \delta q_k \qquad \text{d'où :}$$

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \qquad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

Cas particulier. Supposons que les liaisons soient indépendantes du temps, et qu'il y ait une fonction des forces. Le théorème des forces vives donne :
$$d\sum\frac{mv^2}{2}=\sum(Xdx+Ydy+Zdz)$$
le 2e membre ne contenant, dans ce cas que les forces dir.t appliquées. D'autre part, la fonction $U$ ne contenant pas le temps, on a
$$dU=\sum(Xdx+Ydy+Zdz)$$
pour le déplacement réel ($t$ variable). Donc : $dT=dU$
ce qui donne immédiatement l'intégrale des forces vives :
$$T=U+h$$
C'est une conséquence des équations du mouvement, et par suite des équations de Lagrange qui n'en sont qu'une transformation ; donc on pourra remplacer l'une d'elles par cette intégrale première.

— Applications des équations de Lagrange

Problème (déjà traité dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, 3e cahier, page 140) : On donne dans un plan 2 points $M, M_1$ de même masse liés par un fil de longueur $2l$, et attirés par l'axe des $x$ proportionnellement à la distance. On demande leur mouvement.

Les forces données sont :
$$Y=-m\mu y \qquad Y_1=-m\mu y_1$$
Il y a une fonction de forces :
$$U=-\frac{m\mu}{2}(y^2+y_1^2)$$
Le mouvement du système dépend de 3 paramètres : $\xi, \eta, \theta$.
$(K=3)$



$\xi_0, \eta_0, \theta_0$ sont arbitraires.

Force vive : $2T = 2m(\xi'^2 + \eta'^2) + 2ml^2\theta'^2$ d'où :

$T = m\left[\xi'^2 + \eta'^2 + l^2\theta'^2\right]$ Transformons $U$ :

$y = \eta - l\sin\theta$ $y_1 = \eta + l\sin\theta$

$U = -m\mu(\eta^2 + l^2\sin^2\theta)$ Les équations de Lagrange sont :

$\frac{d}{dt}(2m\xi') = 0$ d'où : $\xi' = \xi'_0$

$\frac{d}{dt}(2m\eta') = -2m\mu\eta$ $\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\mu\eta$

dont l'intégrale générale est : $\eta = A\cos t\sqrt{\mu} + B\sin t\sqrt{\mu}$.

$\frac{d}{dt}(2ml^2\theta') = -2\mu m l^2\sin\theta\cos\theta$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\sin\theta\cos\theta$

qu'on peut intégrer en multipliant les 2 membres par $\frac{d\theta}{dt}$ :

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \mu\cos^2\theta + C$ Ou bien, en posant $2\theta = \alpha$,

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\mu\sin\alpha$ équation du pendule simple

On aurait pu remplacer la 3e équation de Lagrange par l'intégrale des forces vives :

$$\xi'^2 + \eta'^2 + l^2\theta'^2 = -\mu(\eta^2 + l^2\sin^2\theta) + h$$

Or : $\xi'$ est constant ; $\eta'^2 = -\mu\eta^2 + C$ intégrale première ;

donc : $l^2\theta'^2 = -\mu l^2\sin^2\theta + C^{te}$ $\theta'^2 = -\mu\sin^2\theta + C$

c'est l'intégrale première de la 3e équation de Lagrange, que l'on retrouve ainsi.

— Cas d'un corps solide mobile autour d'un point fixe (cf. page 1.)
La position du corps dépend des 3 angles d'Euler : $\theta, \varphi, \psi$.
La demi-force vive est : $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$
qu'on exprimera au moyen des 3 paramètres $\theta, \varphi, \psi$ et de leurs dérivées en substituant les expressions suivantes :

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

On calculera aussi la somme des travaux virtuels dans tout déplacement compatible avec les liaisons : $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$
elle prendra la forme : $\Theta\delta\theta + \Phi\delta\varphi + \Psi\delta\psi$
On écrira alors les équations de Lagrange ; prenons celle qui est relative à $\varphi$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi$$

$$\frac{d}{dt}(Cr) - (Apq - Bqp) = \Phi \qquad C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = \Phi$$

C'est la 3e équation d'Euler. Pour connaître $\Phi$, il faut faire varier $\varphi$ seulement de $\delta\varphi$ ; ce déplacement virtuel est une rotation autour de $Oz$. La somme des travaux virtuels correspondants est : $N\delta\varphi$, $N$ étant la somme des moments des forces données par rapport à $Oz$ : en effet, $\delta z = 0$

$\delta x = -y\delta\varphi \qquad \delta y = x\delta\varphi$ Donc

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma(xY - yX)\delta\varphi = N\delta\varphi$$

Ainsi on trouve $\Phi = N$
c'est bien le 2e membre de la 3e équation d'Euler.

Comme les formules sont symétriques par rapport à $p, q, r$, on peut écrire par simple permutation les 2 autres équations d'Euler. — Mais si l'on voulait écrire les équations de Lagrange relatives à $\theta$ et $\psi$, on ne trouverait pas ces équations d'Euler, mais des combinaisons de ces équations.

— Nous citerons encore comme application des équations de Lagrange le problème de la toupie reposant par sa pointe sur un plan horizontal fixe. Nous allons traiter un problème analogue qui dépend aussi de 5 paramètres.

Problème. Sur un plan fixe horizontal se meut sans frottement un disque homogène pesant dont on néglige l'épaisseur. Trouver son mouvement.

L'ellipsoïde d'inertie de ce corps est évidemment de révolution; prenons $Gz$ axe du disque, $Gx$, $Gy$ axes rectangulaires dans son plan

On a : $A = B = \frac{C}{2}$.

En effet, le moment d'inertie par rapport à $Ox$ est : $\Sigma m(y^2+z^2)$

par rapport à $Oy$ : $\Sigma m(x^2+z^2)$ par rapport à $Oz$ : $\Sigma m(x^2+y^2)$

Faisons $z=0$ ; $C = A + B = 2A$. $(\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2)$

Cette relation a lieu pour tous les corps infiniment minces.

La position du système dépend de 5 paramètres. En effet, elle est déterminée par les 3 coordonnées de $G$ : $\xi, \eta, \zeta$, et les 3 angles d'Euler $\theta, \varphi, \psi$ ; mais il existe une relation (entre ces 6 paramètres) qui exprime que le disque touche

constamment le plan des $xy$. Soit $K$ le point de contact, $H$ la projection de $G$ sur le plan horizontal : $GK$ et $HK$ sont perpendiculaires à la tangente au cercle en $K$, qui est contenue dans le plan. $GH$ est $\zeta$ ; appelons $l$ le rayon $GK$ du disque ; l'angle $\widehat{GKH}$ est l'angle du plan du disque avec le plan horizontal, c.à.d. : $(\widehat{Gz_1, Oz_1}) = \theta$ ; on a donc :
$$\zeta = l \sin\theta$$
Il n'y a donc que 5 paramètres indépendants : $\xi, \eta, \theta, \varphi, \psi$.

La force vive du corps est :
$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$
Exprimons-la en fonction des 5 paramètres : $\zeta' = l\cos\theta . \theta'$
$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + l^2\theta'^2 \cos^2\theta) + A(p^2+q^2) + 2Ar^2$$
$$= M(\xi'^2 + \eta'^2 + l^2\theta'^2 \cos^2\theta) + A(\sin^2\theta . \psi'^2 + \theta'^2) + 2Ar^2$$
$$T = \frac{M}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{1}{2}(Ml^2\cos^2\theta + A)\theta'^2 + \frac{A}{2}\sin^2\theta . \psi'^2 + A(\psi'.\cos\theta + \varphi')^2$$
Il y a une fonction de forces : $U = -Mg\zeta = -Mgl\sin\theta$

Écrivons les équations de Lagrange, au nombre de 5 :

$\frac{d}{dt}(M\xi') = 0$ ou $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$ d'où : $\xi' = \xi'_0$.

$\frac{d}{dt}(M\eta') = 0$ ou $\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$ d'où : $\eta' = \eta'_0$.

$(\varphi)$ $\frac{d}{dt}(2Ar) = 0$ d'où : $r = r_0$ $\psi'\cos\theta + \varphi' = r_0$.

$(\psi)$ $\frac{d}{dt}(A\sin^2\theta . \psi' + 2Ar\cos\theta) = 0$ $A\sin^2\theta . \psi' + 2Ar_0\cos\theta = k$.

Remplaçons la dernière (relative à $\theta$) par l'intégrale des forces vives :
$$\frac{M}{2}(\xi_0'^2 + \eta_0'^2) + \frac{1}{2}(Ml^2\cos^2\theta + A)\theta'^2 + \frac{A}{2}\sin^2\theta\, \psi'^2 + Ar_0^2 = -Mgl\sin\theta + h$$

ou, en réduisant les constantes :

$$(Ml^2\cos^2\theta + A)\theta'^2 + A\sin^2\theta.\psi'^2 = -2Mgl\sin\theta + C$$

Or la 1re équation de Lagrange donne : $\psi' = \dfrac{k - 2Ar_0\cos\theta}{A\sin^2\theta}$

La dernière équation devient une relation entre $\theta$ et $\theta'$ :

$$A\sin^2\theta(Ml^2\cos^2\theta + A)\theta'^2 = A\sin^2\theta(-2Mgl\sin\theta + C) - (k - 2Ar_0\cos\theta)^2$$

On pourra prendre pour variable $tg\frac{\theta}{2}$, et on aura $\underline{\theta}$ en fonction de $\underline{t}$ par une intégrale hyperelliptique.

On voit par cette équation que $\theta$ ne peut devenir égal ni à $0$ ni à $\pi$, car alors $\theta'^2$ deviendrait négatif, et $\theta'$ imaginaire. Cela signifie que le disque ne se couche jamais sur le plan, mais oscille entre 2 inclinaisons maximum et minimum comme la toupie. — Connaissant $\theta$ en fonction de $t$, on en déduira $\psi'$ par la 1re équation, puis $\varphi'$ par la 3e. On remarquera que la 4e équation est celle des moments des quantités de mouvement par rapport à $Gz_1$, et que la 3e est celle des moments des quantités de mouvement par rapport à $Gz$.

## Théorème de Lejeune-Dirichlet.

Supposons que les liaisons soient indépendantes du temps et que les forces données ne dépendent que de la position du système. La somme de leurs travaux élémentaires sera : $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$.
Supposons que la position du système dépende de $k$ paramètres : $q_1\, q_2 \cdots q_k$ :

$$x = \varphi(q_1\, q_2 \cdots\cdots q_k)$$
$$y = \psi(q_1\, q_2 \cdots\cdots q_k)$$
$$z = \varpi(q_1\, q_2 \cdots\cdots q_k)$$

On aura $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k$
et les conditions de l'équilibre du système seront :

$$Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0 \quad \dots\dots \quad Q_k = 0$$

Supposons qu'il y ait une fonction de forces :

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta U(x_1 y_1 z_1 \dots\dots x_n y_n z_n)$$

ou $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k = \delta U(q_1 q_2 \dots\dots q_k)$

Les conditions d'équilibre s'écriront :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 \quad \dots\dots \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

Ce sont les équations qu'il faudrait écrire pour trouver les maximum et minimum de la fonction : $U(q_1 q_2 \dots\dots q_k)$

Théorème. Si l'on a trouvé un système de valeurs des $k$ paramètres $q_1 q_2 \dots q_k$ qui rendent $U$ maximum, la position d'équilibre correspondante est stable (Ce théorème a été énoncé par Lagrange mais sa démonstration n'est pas irréprochable ; celle qu'en a donnée Lejeune-Dirichlet se trouve traduite dans le tome XII du Journal de Liouville, 1847.)

Admettons, pour préciser, que $q_1 q_2 \dots q_k$ s'annulent pour la position d'équilibre considérée, c.à.d. que le maximum ait lieu pour le système $(0, 0, \dots\dots 0)$ ; et que $U$ s'annule elle-même dans cette position, c.à.d. que le maximum de $U$ soit 0 : ~~[illegible]~~ cela est toujours possible, la fonction $U$ n'étant déterminée qu'à une constante additive près :

$$U(0, 0, \dots\dots 0) = 0.$$

Il s'ensuit que pour les valeurs des paramètres voisins de 0, la fonction $U$ est négative. Plus exactement, il existe un nombre

positif $\varepsilon$ tel que, tous les paramètres étant en valeur absolue inférieurs à $\varepsilon$, la fonction $V$ soit négative, sauf pour le système $(0, 0, \ldots\ldots 0)$ ; c.à.d. que pour toutes les valeurs comprises dans le tableau :

$$|q_1| \leqq \varepsilon \quad |q_2| \leqq \varepsilon \ldots\ldots\ldots |q_k| \leqq \varepsilon \qquad (1)$$

on ait ;

$$V(q_1 q_2 \ldots\ldots q_k) < 0 \qquad V(0, 0, \ldots\ldots 0) = 0.$$

Il est évident que l'on peut remplacer la limite $\varepsilon$ par tout nombre positif plus petit. Supposons que l'un des paramètres atteigne cette limite $\varepsilon$, et que tous les autres lui soient inférieurs, c.à.d. que les paramètres vérifient un des $K$ systèmes d'inégalités suivants :

$$\left.\begin{array}{llll} |q_1| = \varepsilon & |q_2| < \varepsilon & |q_3| < \varepsilon \ldots\ldots\ldots & |q_k| < \varepsilon \\ |q_1| < \varepsilon & |q_2| = \varepsilon & |q_3| < \varepsilon \ldots\ldots\ldots & |q_k| < \varepsilon \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ |q_1| < \varepsilon & |q_2| < \varepsilon & |q_3| < \varepsilon \ldots\ldots\ldots & |q_k| = \varepsilon \end{array}\right\} \quad (2)$$

Pour tous ces systèmes de valeurs attribuées aux paramètres, on peut affirmer sans restriction que $V(q_1 q_2 \ldots\ldots q_k) < 0$
car l'un au moins d'entre eux ne s'annule pas, étant égal à $\varepsilon$, de sorte que le système $(0, 0, \ldots\ldots 0)$ se trouve exclu. Donc pour tous les systèmes du tableau (2), on a $-V$ positif et différant de $0$ d'une quantité finie ; on peut donc assigner un nombre positif $p$ assez petit pour que, pour tous les systèmes (2) on ait :

$$-V > p \qquad \text{ou} \qquad 0 > V + p$$

car il suffirait de prendre $p$ très peu inférieur à la valeur minima que prend $-V$ pour tous ces systèmes, et qui est finie positive.

Cela posé, on va démontrer que l'équilibre du système dans cette position est stable, c.à.d. que si l'on écarte infiniment peu le système de sa position d'équilibre et qu'on imprime à chacun de ses points une vitesse infiniment petite, dans toute la durée du mouvement consécutif il s'éloigne infiniment peu de la position d'équilibre.

En effet, on peut toujours appliquer le théorème des forces vives au mouvement qui naît alors: $d\Sigma \frac{mv^2}{2} = dV$

d'où: $\Sigma \frac{mv^2}{2} = V + \left(\Sigma \frac{mv_0^2}{2} - V_0\right)$

Imprimons au système un déplacement suffisamment petit, c.à.d. donnons aux paramètres des valeurs initiales: $q_1^0\ q_2^0 \ldots\ldots q_k^0$ suffisamment voisins de 0, et inférieurs en valeur absolue à $\varepsilon$; soit $V_0$ la valeur correspondante de $V$, elle sera très voisine de 0.

Donnons à chaque point une vitesse suffisamment petite; le système aura une force vive initiale: $\Sigma mv_0^2$ très-voisine de 0.

On va montrer qu'on peut toujours faire en sorte que:

$$\Sigma \frac{mv_0^2}{2} - V_0 \leq p.$$

En effet, si $q_1^0\ q_2^0 \ldots\ldots q_k^0$ sont infiniment petits, $-V_0$ est infiniment petit positif (en vertu de la continuité) et si les vitesses $v_0$ sont infiniment petites, $\Sigma \frac{mv_0^2}{2}$ sera infiniment petite, de sorte que la somme tendra vers 0 (elle s'annule dans l'équilibre). Donc il suffira d'assigner à $q_1^0\ q_2^0 \ldots q_k^0$ une certaine limite supérieure $q$, et aux $v_0$ une certaine limite supérieure $v$ pour que l'inégalité précédente soit vérifiée. Dans le mouvement qui prend alors naissance, on aura constamment:

$$\sum \frac{mv^2}{2} \leq V + p$$

Or il est impossible que dans toute la durée du mouvement, un seul des paramètres prenne la valeur $\pm \varepsilon$, car alors on aurait un système du tableau (2) et par suite: $V + p < 0$

Mais d'autre part $\sum \frac{mv^2}{2}$ étant essentiellement positif, ne peut devenir inférieur ou égal à une quantité négative; donc aucun des K paramètres n'atteint la limite $\varepsilon$, ce qui revient à dire que le système, dans tout son mouvement, reste voisin de sa position d'équilibre, et aussi voisin qu'on le veut. c. q. f. d.

Ainsi, pour assurer la stabilité, c.à.d pour que les paramètres restent compris dans le tableau (1) et n'atteignent même pas leurs limites, il suffira de choisir une limite supérieure des $q_1^0\, q_2^0 \ldots q_K^0$ et une limite supérieure des $v_0$ suffisamment petites pour qu'on ait:

$$\sum \frac{mv_0^2}{2} - U_0 \leq p$$

ce qui, nous l'avons prouvé, est toujours possible (la fonction $V_0$ étant supposée continue au voisinage de $0, 0 \ldots 0$.)

— Nous allons appliquer les équations de Lagrange à l'étude du mouvement que prend le système dans les conditions initiales que nous venons de définir, c.à.d. de ses oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable. Pour simplifier, nous étudierons le cas de 2 paramètres seulement, $q_1, q_2$.

La demi-force vive a alors la forme suivante:

$$T = Aq_1'^2 + 2Bq_1'q_2' + Cq_2'^2$$

A, B, C dépendant de $q_1, q_2$; car on sait que T est du 2e degré en

$q'_1, q'_2$ — Or, comme $q_1, q_2$ sont infiniment petits, on peut développer $A, B, C$ par la formule de Maclaurin :

$$A = a + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots\ldots$$

$$B = b + b_{11} q_1 + b_{12} q_2 + \ldots\ldots \qquad a, b, c \text{ constantes.}$$

$$C = c + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 + \ldots\ldots$$

d'où :

$$T = a q_1'^2 + 2b q'_1 q'_2 + c q_2'^2 + T_1$$

$T_1$ étant du 1er degré au moins en $q_1, q_2$, et par conséquent infiniment petit du 3e ordre au moins ; car $q'_1 q'_2$ sont infiniment petits comme $q_1, q_2$, puisque les vitesses sont infiniment petites.

La forme quadratique : $a q_1'^2 + 2b q'_1 q'_2 + c q_2'^2$ est essentiellement positive, c.à.d. $b^2 - ac < 0$

en effet, la force vive est essentiellement positive ; or, si $q_1 q_2$ sont infiniment petits, c'est la forme quadratique qui donne son signe à $T$, et si l'on n'avait pas : $b^2 - ac < 0$

on pourrait, pour certaines valeurs du rapport arbitraire $\dfrac{q'_1}{q'_2}$ rendre la forme quadratique négative, ce qui ne se peut.

Donc $a$ et $c$ doivent être du même signe, et on peut toujours supposer : $a > 0$ $c > 0$.

La fonction $U$ sera aussi développable par la formule de Maclaurin au voisinage du système $(0, 0)$ — Or : $U(0,0) = 0$ ; $\left(\dfrac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 = 0$ , $\left(\dfrac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 = 0$ ; le développement commencera donc par des termes du 2e ordre :

$$U(q_1 q_2) = -(\alpha q_1^2 + 2\beta q_1 q_2 + \gamma q_2^2) + U_1$$

$U_1$ étant du 3e ordre au moins —

On a mis en évidence le signe $-$, car pour $q_1\, q_2$ infiniment petits, c'est le trinôme du 2e degré qui donne son signe, et l'on sait que $V$ est négative au voisinage de $(0, 0)$ De plus, le trinôme, abstraction faite de ce signe, doit être essentiellement positif, car il n'y aurait pas maximum s'il pouvait devenir négatif pour une valeur quelconque du rapport arbitraire $\frac{q_1}{q_2}$; donc on doit avoir:

$\beta^2 - \alpha\gamma < 0 \qquad \alpha\gamma > 0 \qquad$ ou: $\quad \alpha > 0 \quad \gamma > 0.$

les conclusions s'appliquent d'ailleurs toutes les fois qu'on développe une fonction en série de Maclaurin au voisinage d'un de ses maximums (ou minimums.)

Nous allons pouvoir écrire les équations de Lagrange et nous négligerons tous les termes d'ordre supérieur au 1er:

$$\frac{d}{dt}(aq_1' + bq_2') = -(\alpha q_1 + \beta q_2)$$

$$\frac{d}{dt}(bq_1' + cq_2') = -(\beta q_1 + \gamma q_2)$$

ou:

$$\begin{cases} a\dfrac{d^2q_1}{dt^2} + b\dfrac{d^2q_2}{dt^2} = -(\alpha q_1 + \beta q_2) \\ b\dfrac{d^2q_1}{dt^2} + c\dfrac{d^2q_2}{dt^2} = -(\beta q_1 + \gamma q_2) \end{cases}$$

On a un système d'équations linéaires à coefficients constants, qui s'intègre au moyen d'exponentielles ou de lignes trigonométriques. Essayons de trouver une intégrale de la forme:

$$q_1 = \lambda \cos(rt + \rho) \qquad q_2 = \mu \cos(rt + \rho)$$

$r$ étant réel (sans quoi on retomberait sur des exponentielles)

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = -\lambda r^2 \cos(rt + \rho) \qquad \frac{d^2q_2}{dt^2} = -\mu r^2 \cos(rt + \rho)$$

Substituons ces expressions dans les équations; $\cos(rt+\rho)$ disparaît comme facteur commun, et il reste une relation entre les coefficients:

$$a\lambda r^2 + b\mu r^2 = \alpha\lambda + \beta\mu \qquad \text{ou:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(\alpha - ar^2) + \mu(\beta - br^2) = 0 \\ \lambda(\beta - br^2) + \mu(\gamma - cr^2) = 0 \end{array} \right.$$
$$b\lambda r^2 + c\mu r^2 = \beta\lambda + \gamma\mu$$

Comme $\lambda$ et $\mu$ ne peuvent être nuls à la fois (solution insignifiante: $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, donnant la position d'équilibre) on doit égaler à $0$ le déterminant des 2 équations, ce qui donne la relation:

$$(\alpha - ar^2)(\gamma - cr^2) - (\beta - br^2)^2 = 0$$

équation du 2e degré en $r^2$, ou bicarrée en $r$. On en tirera pour $r^2$ 2 valeurs réelles et positives, qui donneront pour $r$ 4 valeurs réelles et symétriques; mais le signe de $r$ importe peu (on changerait en même temps le signe de $\rho$) et cela ne fait que 2 solutions distinctes. (des cosinus ne changent pas)

Nous avons affirmé que l'on avait 4 valeurs réelles de $r$; en effet, si $r$ était imaginaire, en la portant dans les formules de $q_1, q_2$, on aurait des exponentielles réelles: $e^{kt}$ et quand $t$ augmente indéfiniment, $q_1, q_2$ augmenteraient aussi indéfiniment, ce qui est contraire au théorème de Lejeune-Dirichlet. — On peut aussi le vérifier directement par l'algèbre: Substituons $0$ à $r^2$ dans le 1er membre de l'équation bicarrée; on a: $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ résultat positif;

substituons $+\infty$, on a: $ac - b^2 > 0$ résultat positif

Substituons $\frac{\alpha}{a} > 0$, on a: $-(\beta - br^2)^2$ résultat négatif.

Donc cette équation a 2 racines positives en $r^2$, comme nous l'avions annoncé.

Les 2 équations en $\lambda$ et $\mu$ se réduisent à une seule quand on y porte une des racines $r$, soit $r'$ ou $r''$, puisque ce sont les valeurs de $r$ qui annulent leur déterminant. L'une quelconque de ces équations, par exemple: $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\beta - br^2}{\alpha + ar^2}$

détermine le rapport de $\lambda$ à $\mu$.

La racine $r'$ donnera donc une première solution:

$$q_1 = \lambda' \cos(r't+\rho') \qquad q_2 = \mu' \cos(r't+\rho')$$ ou:

$$q_1 = -\mu' \frac{\beta - br'^2}{\alpha - ar'^2}\cos(r't+\rho') \qquad q_2 = \mu'\cos(r't+\rho')$$

avec 2 constantes arbitraires: $\mu'$, $\rho'$.

La racine $r''$ donnera la seconde solution:

$$q_1 = -\mu'' \frac{\beta - br''^2}{\alpha - ar''^2}\cos(r''t+\rho'') \qquad q_2 = \mu''\cos(r''t+\rho'')$$

avec 2 constantes arbitraires: $\mu''$, $\rho''$. — On a une nouvelle solution en ajoutant les 2 précédentes:

$$q_1 = -\mu' \frac{\beta - br'^2}{\alpha - ar'^2}\cos(r't+\rho') - \mu'' \frac{\beta - br''^2}{\alpha - ar''^2}\cos(r''t+\rho'')$$

$$q_2 = \mu'\cos(r't+\rho') + \mu''\cos(r''t+\rho'')$$

et comme elle contient 4 constantes arbitraires, c'est l'intégrale générale du système proposé. Les 4 constantes se déterminent par les conditions initiales.

Dans le cas particulier où $\mu''$ serait nul, le mouvement serait une oscillation simple de période: $\frac{2\pi}{r'}$.

Si au contraire $\mu'$ était nul, le mouvement serait une oscillation simple ayant pour période: $\frac{2\pi}{r''}$.

Le mouvement général, composé de ces 2 oscillations simples,

sera périodique ou non, suivant que $r'$, $r''$ seront commensurables ou incommensurables entre elles; c'est dans le 1er cas seulement que le mouvement sera une oscillation proprement dite, c.à.d. que le système repassera au bout d'un temps fini par les mêmes positions.

Remarque. Les racines $r'$, $r''$ sont des invariants du problème; car si l'on changeait de variables, en prenant par exemple de nouveaux paramètres $p_1$ $p_2$ qui s'annuleraient en même temps que $q_1$ $q_2$, les racines de l'équation bicarrée seraient les mêmes. Cela résulte de cette propriété générale que le discriminant d'une forme quadratique est un invariant de cette forme.

– Dans le cas de 3 paramètres, les 3 quantités $r'$, $r''$, $r'''$ seraient les racines d'une équation du 3e degré en $r^2$ (équation en $\lambda$ pour une conique.) Elles seraient toujours réelles, et invariantes.

– Dans le cas général de $K$ paramètres, on doit trouver $K$ racines réelles donnant autant de solutions particulières distinctes, et l'intégrale générale est une combinaison linéaire de ces solutions. Il est évident que la condition pour que le mouvement général soit périodique est de plus en plus restreinte quand $K$ augmente.

– Problème. Un disque homogène pesant est attaché par son bord à un fil $OA$, de longueur $l$, dont l'extrémité $O$ est fixe, et assujetti à se mouvoir dans un plan vertical. Étudier les oscillations infiniment petites du système autour de sa position d'équilibre stable.

Menons dans le plan vertical les axes $Ox$ horizontal, $Oy$ vertical vers le bas. La position du disque dépend de 2 paramètres: l'angle $\theta$ que fait $OA$ avec $Oy$; l'angle $\alpha$ que fait $AC$ avec la verticale

Ces 2 paramètres s'annulent dans la position d'équilibre stable —
Calculons la force vive du disque.
Soient $\xi, \eta$ les coordonnées de son centre C (~~centre de gravité~~)
~~soit a la longueur de son rayon~~:

$$\xi = l\sin\theta + a\sin\alpha$$

$$\eta = l\cos\theta + a\cos\alpha$$

$$T = \frac{M}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{Mk^2}{2}\alpha'^2$$

$$T = \frac{M}{2}\left[l^2\theta'^2 + a^2\alpha'^2 + 2al\alpha'\theta'\cos(\theta-\alpha)\right] + \frac{Ma^2}{4}\alpha'^2$$

$$T = \frac{M}{2}\left[l^2\theta'^2 + \frac{3}{2}a^2\alpha'^2 + 2al\alpha'\theta'\cos(\theta-\alpha)\right]$$

Développons les termes qui contiennent $\theta$ et $\alpha$ :

$$\cos(\theta-\alpha) = 1 - \frac{(\theta-\alpha)^2}{1.2} + \frac{(\theta+\alpha)^4}{1.2.3.4} - \dots\dots$$

$$T = \frac{M}{2}\left[l^2\theta'^2 + 2al\alpha'\theta' + \frac{3}{2}a^2\alpha'^2\right] + T_1$$

La fonction de forces est : $dU = Mg\,d\eta$

$$U = Mg(l\cos\theta + a\cos\alpha) + C^{te}$$

$U$ doit s'annuler pour $\theta = 0$, $\alpha = 0$ ; posons donc :

$$U = Mg(l\cos\theta + a\cos\alpha) - Mg(l+a) = Mg\left[l(\cos\theta - 1) + a(\cos\alpha - 1)\right]$$

On voit que $U$ est négative dans le voisinage de la position d'équilibre et que $U_0$ est bien un maximum. Développons les cosinus :

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \dots\dots \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots\dots$$

O x θ l A a α C A C 4

$$U = -\frac{Mg}{2}(l\theta^2 + a\alpha^2) + U_1 \qquad U_1 \text{ est du 3e ordre.}$$

Appliquons les équations de Lagrange en négligeant $I_1$, $U_1$ :

$$l^2\theta'' + al\alpha'' = -gl\theta \qquad\qquad \left\{ l\theta'' + a\alpha'' = -g\theta \right.$$

$$al\theta'' + \frac{3}{2}a^2\alpha'' = -ga\alpha \quad \text{ou :} \quad \left\{ l\theta'' + \frac{3}{2}a\alpha'' = -g\alpha \right.$$

Essayons de trouver des intégrales de la forme

$$\theta = \lambda\cos(rt+\rho) \qquad\qquad \alpha = \mu\cos(rt+\rho)$$

$$\lambda(g - lr^2) - \mu a r^2 = 0 \qquad\qquad -\lambda l r^2 + \mu\left(g - \frac{3}{2}ar^2\right) = 0$$

On tirera $r^2$ de l'équation bicarrée :

$$(g - lr^2)\left(g - \frac{3}{2}ar^2\right) - alr^4 = 0$$

On aura les racines : $\pm r'$, $\pm r''$, et la relation entre $\lambda$ et $\mu$ :

$$\mu = \lambda\,\frac{g - lr^2}{ar^2}$$

L'intégrale générale sera alors :

$$\theta = \lambda'\cos(r't+\rho') + \lambda''\cos(r''t+\rho'')$$

$$\alpha = \lambda'\frac{g - lr'^2}{ar'^2}\cos(r't+\rho') + \lambda''\frac{g - lr''^2}{ar''^2}\cos(r''t+\rho'')$$

On pourra simplifier le problème en introduisant des hypothèses particulières, par exemple : $l = a$

— <u>Exercice</u> : Etudier les oscillations infiniment petites d'un point pesant sur une surface autour de sa position d'équilibre stable.

Cette position est le point le plus bas : O ; soit Oxy le plan tangent, horizontal ; on simplifiera les formules en prenant pour axes les tangentes aux directions principales en O. L'expression du <u>z</u>

de la surface en fonction de $x, y$ commencera par deux termes en $x^2, y^2$ (sans terme rectangle)
On aura alors les équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu' y$$

qu'on intègre séparément :

$$x = A\cos(t\sqrt{\mu} + \rho)$$
$$y = B\cos(t\sqrt{\mu'} + \rho')$$

Les 2 coordonnées horizontales du point mobile éprouvent des oscillations dont les périodes respectives sont $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu'}}$.
Si $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\mu'}$ sont commensurables, le point repassera par la position initiale ~~et le~~ avec la vitesse initiale mouvement répètera les mêmes phases ; ce sera une oscillation proprement dite (courbe fermée)

Si au contraire $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\mu'}$ sont incommensurables, la projection horizontale de la trajectoire du point ne se fermera jamais ; elle sera tangente aux côtés du rectangle :

$$x = \pm A, \quad y = \pm B$$

en une infinité de points, et elle recouvrira tout l'intérieur de ce rectangle, c.à.d. qu'il n'y aura aucun point du rectangle dont elle ne passe aussi près qu'on voudra

La transformation des équations de Lagrange, commencée par Poisson, a été achevée par Hamilton, qui leur a donné la forme canonique. - Si l'on considère $q'_1 q'_2 \ldots q'_k$ comme des variables indépendantes, les équations du mouvement sont les suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} &= Q_\alpha \\ q'_\alpha &= \frac{dq_\alpha}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \alpha = 1, 2, \ldots\ldots k.$$

Ce sont $2k$ équations simultanées du 1er ordre qui définissent $q_1 q_2 \ldots q_k, q'_1 q'_2 \ldots q'_k$ en fonction de $t$. Substituons à $q'_1 q'_2 \ldots q'_k$ de nouvelles variables $p_1 p_2 \ldots p_k$ en posant:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1} \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial q'_k} \qquad (P)$$

Ce sont des équations du 1er degré en $q'_1 q'_2 \ldots q'_k$ ; on les résoudra par rapport aux $q'$, qu'on obtient en fonction de $q_1 \ldots q_k\ p_1 \ldots p_k\ t$, et on porte ces expressions dans les équations du mouvement - $T$ devient alors une fonction de $q_1 q_2 \ldots q_k\ p_1 p_2 \ldots p_k\ t$ - Laissons $t$ constant, et faisons varier $q_1 \ldots q_k\ p_1 \ldots p_k$ d'une manière indépendante; $q'_1 \ldots q'_k$ éprouveront des variations qui seront fonctions de ces $2k$ variations arbitraires, et la variation de $T$ sera:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \left[\frac{\partial T}{\partial q'_1}\delta q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2}\delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k\right.$$

Transformons la 2e partie de cette expression au moyen des $p$ et $\delta p$:
Il s'écrit: $p_1 \delta q'_1 + p_2 \delta q'_2 + \ldots + p_k \delta q'_k =$

$$\delta(p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k) - (q'_1 \delta p_1 + q'_2 \delta p_2 + \ldots + q'_k \delta p_k)$$

Posons : $p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \dots + p_k q'_k - T = K$

$$\delta K = q'_1 \delta p_1 + q'_2 \delta p_2 + \dots + q'_k \delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 - \dots - \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k$$

Or $K$ est fonction des $q$, des $q'$ et des $p$ ; mais si l'on y remplace les $q'_i$ par leurs expressions tirées des équations (P), $K$ deviendra fonction des $p$ et des $q$ — En y faisant $t$ constant et en donnant aux $2k$ variables des variations arbitraires, la variation de $K$ sera :

$$\delta K = \frac{\partial K}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial K}{\partial p_2}\delta p_2 + \dots + \frac{\partial K}{\partial p_k}\delta p_k + \frac{\partial K}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial K}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial K}{\partial q_k}\delta q_k$$

Mais comme les $2k$ accroissements $\delta p$, $\delta q$ sont indépendants, les 2 expressions de $\delta K$ doivent être identiques, de sorte qu'on a les $2k$ identités suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} &= q'_\alpha \\ \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} &= -\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \end{aligned}\right\} \alpha = 1, 2, \dots k.$$

Il faut bien remarquer que dans cette dernière égalité, les dérivées n'ont pas le même sens ; $K$ est supposé exprimé en fonction des $p$ et des $q$, tandis que $T$ est fonction des $q$ et des $q'$, ceux-ci étant eux-mêmes fonctions des $p$ et des $q$ — La première égalité donne la valeur des $q'$ telle qu'on la tirerait des équations (P) mais cette solution est purement théorique, car pour former cette égalité il faut connaître $K$ et y avoir substitué les valeurs des $q'$ tirées des équations (P.) — Les équations du mouvement deviennent, en vertu des identités précédentes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} &= Q_\alpha \\ \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} \end{aligned}\right\} \alpha = 1, 2, \dots m$$

Sous cette forme, elles sont absolument générales. Mais on ne les emploie guère que sous la forme définitive qu'elles prennent dans l'hypothèse où il y a une fonction de forces ou plus généralement une fonction $U(q_1 q_2 \dots q_k t)$ dont les dérivées partielles sont respectivement $Q_1 \, Q_2 \dots Q_k$. Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

Posons : $K - U = H$, $H$ sera fonction des $p$, des $q$ et de $t$.

Mais comme $U$ ne dépend pas des $p$, $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$.

On a donc les équations canoniques de Hamilton :

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \dots k.$$

Ce sont $2k$ équations du 1<sup></sup>er ordre définissant $q_1 \dots q_k \, p_1 \dots p_k$ en fonction du temps. — Pour les écrire, il suffit de former $H$. On calcule d'abord $T$, demi-force vive, qu'on exprime en fonction des $q$ et des $q'$ ; puis on pose les équations (P) :

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}$$

qu'on résout par rapport à $q'_1 \dots q'_k$, et on porte les expressions ainsi obtenues dans la fonction : $K = p_1 q'_1 + \dots + p_k q'_k - T$

enfin on pose : $H = K - U$

Les intégrales générales du système des équations canoniques devront contenir $2k$ constantes arbitraires, qui seront déterminées par les valeurs

initiales de : $q_1 \ldots\ldots q_k, q'_1 \ldots\ldots q'_k$.

Le calcul de $H$ se simplifie quand les liaisons sont indépendantes du temps et qu'il y a une fonction des forces. En effet, les coordonnées $x, y, z$ ne contenant pas le temps, $T$ sera une fonction homogène de $q'_1 \ldots\ldots q'_k$ ; on sait qu'elle est du 2e degré ; on aura donc, par la formule des fonctions homogènes :

$$q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots\ldots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} = 2T \qquad (\text{degré } 2)$$

ou : $p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots\ldots + p_k q'_k = 2T$ $\qquad K = T$

D'où :

$$H = T - U$$

La fonction $H$ est dans ce cas l'énergie totale du système : $T$ est l'énergie cinétique ; $-U$ est l'énergie potentielle.

On peut écrire immédiatement l'intégrale des forces vives :

$$T = U + h \qquad \text{ou} \qquad H = h = C^{te}$$

Donc, quand il y a une fonction des forces et que les liaisons sont indépendantes du temps, l'énergie totale est constante (cf. 3e cahier page 116.)

L'intégrale des forces vives peut être considérée comme une conséquence des équations du mouvement ; elle pourra donc remplacer une des équations canoniques.

– On a à intégrer les $2k$ équations simultanées :

$$(1) \quad \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (2) \qquad \alpha = 1, 2 \ldots\ldots m$$

Les intégrales générales contenant $2k$ constantes seront de la forme :

$$q_\alpha = f_\alpha(t, a_1 a_2 \ldots\ldots a_k, b_1 b_2 \ldots\ldots b_k)$$
$$p_\alpha = \varphi_\alpha(t, a_1 a_2 \ldots\ldots a_k, b_1 b_2 \ldots\ldots b_k)$$

Théorème de Jacobi. On peut obtenir les intégrales générales des équations canoniques quand on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1 q_2 \ldots\ldots q_K, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots\ldots \frac{\partial V}{\partial q_K}\right) = 0$$

où l'on a substitué dans $H$, au lieu de $p_1 p_2 \ldots p_K$ les dérivées $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots\ldots \frac{\partial V}{\partial q_K}$, $V$ étant une fonction inconnue de $t$ et des $q$. Une intégrale complète de cette équation devra contenir $(K+1)$ constantes arbitraires ; mais comme $V$ ne figure que par ses dérivées, $(V+C)$ sera une solution, et il suffira d'avoir une solution $V$ contenant $K$ constantes non additives.

Soit :
$$V(q_1 q_2 \ldots\ldots q_K, t, a_1 a_2 \ldots\ldots a_K)$$
une intégrale complète de cette forme (on néglige la constante additive.)

On va prouver que les intégrales des équations canoniques sont :

$$(3)\quad \frac{\partial V}{\partial a_\alpha} = b_\alpha \qquad \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \quad (4) \qquad \alpha = 1, 2, \ldots\ldots K.$$

Dans le système d'équations (3) ne figurent que les variables $q$ ; donc, en le résolvant, on trouverait :

$$q_\alpha = f_\alpha(t, a_1 a_2 \ldots\ldots a_K, b_1 b_2 \ldots\ldots b_K)$$

En portant alors ces valeurs dans le système (4) on en tirerait immédiatement les $p$ sous la forme suivante :

$$p_\alpha = \varphi_\alpha(t, a_1 a_2 \ldots a_K, b_1 b_2 \ldots\ldots b_K)$$

Il reste à montrer que ces expressions des $q$ et des $p$, tirées des systèmes (3) et (4) vérifient les systèmes (1) et (2).

Pour avoir les dérivées $\frac{dq_\alpha}{dt}$, il n'est pas besoin de résoudre le système (3) et d'en tirer $q_1 \ldots q_k$. Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites, en différentiant ces équations par rapport à $t$ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots\ldots \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t} = 0$$

etc. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (5)

On aura ainsi $k$ équations du 1er degré par rapport à $\frac{dq_1}{dt}, \ldots\ldots \frac{dq_k}{dt}$; Or le déterminant de ce système (5) est différent de 0, parceque par hypothèse, $V$ est une intégrale complète (c'est le déterminant fonctionnel par rapport aux $a$ et aux $q$.) On pourra donc résoudre ce système et en tirer $\frac{dq_1}{dt}, \ldots\ldots \frac{dq_k}{dt}$. On devra vérifier ensuite que ces dérivées sont respectivement égales à $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots\ldots \frac{\partial H}{\partial p_k}$ — Mais pour cela il n'est pas besoin de résoudre le système (5); il suffit de montrer qu'il est satisfait par la substitution: $\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, c.à.d. que l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t} = 0$$

et les autres deviennent des identités quand on y remplace les $q$ par leurs valeurs tirées des équations (3) et les $p$ par leurs valeurs tirées des équations (4). Mais on va voir qu'elles sont vérifiées identiquement dès qu'on y remplace $p_\alpha$ par $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$.

En effet, $V$ est par hypothèse une intégrale complète de l'équation de Jacobi, c.à.d annule son 1er membre quels que soient les $a$, les $q$ et $t$.

Donc sa dérivée partielle par rapport à $\alpha_1$ par exemple est nulle identiquement, et l'on a :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1 \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1 \partial q_2} + \ldots\ldots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1 \partial q_k} = 0$$

identité qu'il s'agissait de vérifier. On vérifierait de même ~~les autres~~.

Ainsi les équations (1) sont satisfaites par les $q$ tirés des équations (3).

— Passons aux équations (4) ; elles donnent, en différentiant, les dérivées $\frac{dp_1}{dt} \ldots\ldots \frac{dp_k}{dt}$ qui figurent dans les équations (2) :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1^2}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_k}\frac{dq_k}{dt}$$

ou, en vertu des équations (1) que nous venons de vérifier,

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots\ldots + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Il s'agit de vérifier que cette expression est identique à : $-\frac{\partial H}{\partial q_1}$, ou que l'on a identiquement :

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots\ldots + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Or $V$ vérifiant identiquement l'équation de Jacobi, on peut prendre la dérivée partielle par rapport à $q_1$, et l'on a identiquement :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2} + \ldots\ldots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_k} = 0$$

ce qu'il fallait vérifier. — On vérifierait de même les autres identités, qui prouvent que les équations (2) sont satisfaites par les $p$ tirés des équations (4). Donc les équations (3) et (4) sont les intégrales générales des équations (1) et (2).

On peut démontrer qu'inversement, si l'on sait intégrer le système (1) et (2), on connaîtra l'intégrale générale de l'équation de Jacobi; et en effet, si l'on forme les équations caractéristiques de celle-ci, on retrouve les équations canoniques. Les deux problèmes analytiques sont donc équivalents, et de même difficulté théorique; ce n'est que dans la pratique que l'un peut être plus commode que l'autre.

Nous allons appliquer ces résultats à un problème déjà traité — (cf 3e cahier, page 140)

— Exercice. Soient 2 points de masse 1 reliés par un fil de longueur $2l$, ~~et attirés~~ situés dans un plan horizontal et attirés par l'axe des $x$ proportionnellement à la distance. Les forces données sont:

$$Y = -\mu y \qquad Y_1 = -\mu y_1$$

La fonction des forces est:

$$U = -\frac{\mu}{2}\left(y^2 + y_1^2\right)$$

La demi-force vive est:

$$T = \xi'^2 + \eta'^2 + l^2\theta'^2$$

On a: $K = T$ $\qquad H = T - U$ ou

$$H = \xi'^2 + \eta'^2 + l^2\theta'^2 + \mu\left(\eta^2 + l^2\sin^2\theta\right)$$

Posons:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \xi'} \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \eta'} \qquad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \theta'}$$

ou $\quad p_1 = 2\xi' \qquad p_2 = 2\eta' \qquad p_3 = 2l^2\theta'$ d'où:

$$\xi' = \frac{p_1}{2} \qquad \eta' = \frac{p_2}{2} \qquad \theta' = \frac{p_3}{2l^2}$$

$$H = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2 + \frac{p_3^2}{l^2}\right) + \mu\left(\eta^2 + l^2\sin^2\theta\right)$$

(forme adjointe de $T$)

Ecrivons les équations canoniques :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{p_1}{2} \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{p_2}{2} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_3}{2l^2}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 0 \qquad \frac{dp_2}{dt} = -2\mu\eta \qquad \frac{dp_3}{dt} = -2\mu l^2 \sin\theta\cos\theta$$

On obtient, en ~~intégrant les premières~~ éliminant les $p$ entre les premières et les secondes :

$$p_1 = C^{te} \qquad \frac{d\xi}{dt} = C^{te} \qquad \xi = Ct + C'$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\mu\eta \qquad \eta = A\cos t\sqrt{\mu} + B\sin t\sqrt{\mu}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\sin\theta\cos\theta \qquad \text{équation du pendule simple.}$$

On retrouve bien les équations obtenues précédemment ; la 1e donne le mouvement uniforme de la projection de G sur Ox ; la 2e donne l'oscillation de G de part et d'autre de Ox ; la 3e donne l'oscillation pendulaire de la ligne $MM_1$ autour de G.

On pourrait écrire l'intégrale des forces vives : $H = h$
mais elle n'est pas utile ici, car elle est plus compliquée que les équations précédentes, qui s'en déduisent d'ailleurs aisément.

— On peut aussi appliquer l'équation de Jacobi, qui s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2\right] + \mu(\eta^2 + l^2\sin^2\theta) = 0$$

Cherchons une intégrale complète de la forme :

$$V = -ht + \alpha\xi + \varphi(\eta) + \psi(\theta)$$

Substituons :

$$-4h + \alpha^2 + \varphi'^2 + \frac{\psi'^2}{l^2} + 4\mu(\eta^2 + l^2\sin^2\theta) = 0$$

$$-4h+\alpha^2+\varphi'^2+4\mu\eta^2 = -\frac{\psi'^2}{l^2} - 4\mu l^2 \sin^2\theta$$

$\eta$ et $\theta$ étant des variables indépendantes l'une de l'autre, on ne peut vérifier cette équation qu'en égalant les 2 membres à une même constante :
$$\varphi'^2+4\mu\eta^2+\alpha^2-4h = 2C$$

d'où :
$$\varphi(\eta) = \int\sqrt{2C+4h-\alpha^2-4\mu\eta^2}\, d\eta$$

$$\frac{\psi'^2}{l^2}+4\mu l^2\sin^2\theta = -2C$$

d'où :
$$\psi(\theta) = l\int\sqrt{-2C-4\mu l^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

L'intégrale complète de l'équation de Jacobi est donc :

$$V = -ht+\alpha\xi+\int\sqrt{2C+4h-\alpha^2-4\mu\eta^2}\, d\eta + l\int\sqrt{-2C-4\mu l^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

Elle contient bien 3 constantes non additives : $h$, $\alpha$, $C$

Les équations du mouvement seront :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = h' \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha' \qquad \frac{\partial V}{\partial C} = C'$$

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial \xi} = \alpha \qquad p_2 = \frac{\partial V}{\partial \eta} = \sqrt{2C+4h-\alpha^2-4\mu\eta^2} \qquad p_3 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \sqrt{-2C-4\mu l^2\sin^2\theta}$$

— Autre exemple : Toupie reposant par sa pointe sur un plan horizontal. (cf. page 37.) On a 5 paramètres : $\xi, \eta, \theta, \varphi, \psi$ : $\zeta = l\cos\theta$.
$\theta$ est l'angle de l'axe $Gz$ de la toupie avec l'axe vertical $Gz_1$. — Supposons la masse de la toupie égale à 1. La demi-force vive est :

$$T = \frac{1}{2}\left[\xi'^2+\eta'^2+l^2\sin^2\theta.\theta'^2 + A(p^2+q^2) + Cr^2\right]$$

Or: $p^2+q^2 = \sin^2\theta.\psi'^2+\theta'^2$ $\qquad r = \varphi'+\psi'\cos\theta$

$$T = \frac{1}{2}\left[\xi'^2+\eta'^2+(l^2\sin^2\theta+A)\theta'^2+A\sin^2\theta.\psi'^2+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)^2\right]$$

On voit que $T$ est fonction homogène de $\xi', \eta', \theta', \varphi', \psi'$, parce que les liaisons sont indépendantes du temps. On a donc:

$$K = T \qquad \text{et} \qquad H = K - U = T - U$$

La fonction des forces est: $U = -\cancel{M}g\zeta = -\cancel{M}gl\cos\theta$

Donc: $$H = T + gl\cos\theta$$

Il faut introduire dans $H$ $p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ au lieu de $q_1'\, q_2'\, q_3'\, q_4'\, q_5'$:

$p_1 = \xi'$ $\quad p_2 = \eta'$ $\quad p_3 = (l^2\sin^2\theta+A)\theta'$ $\quad p_4 = C(\varphi'+\psi'\cos\theta)$

$p_5 = A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta(\varphi'+\psi'\cos\theta)$ d'où l'on tire:

$\xi' = p_1$ $\quad \eta' = p_2$ $\quad \theta' = \dfrac{p_3}{l^2\sin^2\theta+A}$ $\quad \varphi'+\psi'\cos\theta = \dfrac{p_4}{C}$

$\psi' = \dfrac{p_5 - p_4\cos\theta}{A\sin^2\theta}$ Substituons dans $H$:

$$H = \frac{1}{2}\left[p_1^2+p_2^2+\frac{p_3^2}{l^2\sin^2\theta+A}+\frac{(p_5-p_4\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}+\frac{p_4^2}{C}\right]+gl\cos\theta$$

Écrivons les équations canoniques du 1er type: $\dfrac{dq_\alpha}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$

$\dfrac{d\xi}{dt} = p_1$ $\quad \dfrac{d\eta}{dt} = p_2$ $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{p_3}{l^2\sin^2\theta+A}$

$\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{p_5-p_4\cos\theta}{A\sin^2\theta}$ $\quad \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{(p_5-p_4\cos\theta)\cos\theta}{A\sin^2\theta}+\dfrac{p_4}{C}$

Ce sont les mêmes relations que plus haut.

Écrivons ensuite les équations canoniques du 2e type $\dfrac{dp_\alpha}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

$$\frac{dp_1}{dt} = 0 \qquad \frac{dp_2}{dt} = 0 \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \qquad \frac{dp_4}{dt} = 0 \qquad \frac{dp_5}{dt} = 0$$

On trouve ainsi que $p_1$ $p_2$ $p_4$ $p_5$ sont des constantes, et on a les équations: $\xi' = C^{te}$ $\quad \eta' = C^{te}$

qui montrent que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme, et qu'on aurait obtenu en appliquant le théorème des projections des quantités de mouvement.

$\varphi' + \psi' \cos\theta = C^{te}$ c à d. $\quad r = r_0$

$A \sin^2\theta\, \psi' + C r_0 \cos\theta = C^{te}$ d'où l'on tire $\psi$.

La 1e de ces équations s'obtiendrait en écrivant l'équation d'Euler relative à l'axe $Gz$: $\quad C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0$

La 2e s'obtiendrait en appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe vertical $Gz_1$.

Il reste à intégrer l'équation: $\quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$

Mais on peut la remplacer par l'intégrale des forces vives, qui est:

$$H = h.$$

Cette intégrale première se simplifie, à cause des intégrales déjà obtenues, $p_1$ $p_2$ $p_4$ $p_5$ étant des constantes:

$$\frac{p_3^2}{l\sin^2\theta + A} = 2h' - \frac{(p_5 - p_4\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2gl\cos\theta$$

Remplaçons-y $p_3$ par son expression en $\theta'$:

$$(l^2\sin^2\theta + A)\,\theta'^2 = 2h' - \frac{(p_5 - p_4\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2gl\cos\theta$$

d'où l'on tirera $\underline{t}$ en fonction de $\underline{\theta}$ par une quadrature.

On peut encore écrire l'équation de Jacobi :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2}{l^2\sin^2\theta + A} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\theta\right)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2}{C}\right] + gl\cos\theta = 0$$

dont il faut trouver une intégrale complète contenant 5 constantes arbitraires non additives. Comme $\theta$ seul figure dans les coefficients, on va essayer de vérifier l'équation avec une intégrale de la forme :

$$V = -ht + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\varphi + \delta\psi + f(\theta)$$

$h, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant 5 constantes arbitraires. — Substituons :

$$-h + \frac{1}{2}\left[\alpha^2 + \beta^2 + \frac{f'^2(\theta)}{l^2\sin^2\theta + A} + \frac{(\delta - \gamma\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{\gamma^2}{C}\right] + gl\cos\theta = 0$$

Résolvons cette équation par rapport à $f'(\theta)$ :

$$\frac{f'^2(\theta)}{l^2\sin^2\theta + A} = 2h - \alpha^2 - \beta^2 - \frac{\gamma^2}{C} - \frac{(\delta - \gamma\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2gl\cos\theta = F(\theta)$$

la fonction $F$ contenant les 5 constantes ; d'où, en intégrant :

$$f(\theta) = \int \sqrt{l^2\sin^2\theta + A}\,\sqrt{F(\theta)}\,d\theta \qquad \sqrt{l^2\sin^2\theta + A} = \Theta$$

On aura alors l'intégrale complète :

$$V = -ht + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\varphi + \delta\psi + \int \Theta\sqrt{F}\,d\theta$$

Les équations du mouvement seront donc :

$$\xi - \alpha\int\frac{\Theta}{\sqrt{F}}\,d\theta = \alpha' \qquad \eta - \beta\int\frac{\Theta}{\sqrt{F}}\,d\theta = \beta'$$

$$\varphi + \int\frac{\Theta}{\sqrt{F}}\left[\frac{\delta - \gamma\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta - \frac{\gamma}{C}\right]d\theta = \gamma'$$

$$\psi - \int\frac{\Theta}{\sqrt{F}}\cdot\frac{\delta - \gamma\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,d\theta = \delta'$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ étant de nouvelles constantes arbitraires; ces équations, étant des relations entre les 5 paramètres, définissent le déplacement géométrique du système. La 5<sup>e</sup> équation est :

$$-t + \int \frac{\Theta}{\sqrt{F}} d\theta = h' \qquad \text{ou} \qquad t + h' = \int \frac{\Theta}{\sqrt{F}} d\theta$$

Cette dernière équation donne le temps en fonction de $\theta$. On voit, en substituant dans les 2 premières, que $\xi$ et $\eta$ sont proportionnels au temps;

$$\xi = \alpha(t+h') + \alpha' \qquad \eta = \beta(t+h') + \beta'$$

La seconde série d'équations ne sert qu'à définir la signification géométrique des ~~inconnues auxiliaires~~ ~~constantes arbitraires~~ $p$ : $\quad p_\alpha = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$

$$p_1 = \alpha \qquad p_2 = \beta \qquad p_3 = \Theta\sqrt{F} \qquad p_4 = \gamma \qquad p_5 = \delta$$

On retrouve ce résultat déjà connu, que $p_1\, p_2\, p_4\, p_5$ sont des constantes : ce sont justement les 4 constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qui figurent dans $V$. La 5<sup>e</sup> constante $h$ est la constante des forces vives; si on substitue aux $p$ leurs expressions dans $H$, on trouve identiquement :

$$H = h$$

ce qui prouve que les $p$ vérifient l'équation des forces vives.

## Théorème de Poisson:

Les équations canoniques étant:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq_\alpha}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dfrac{dp_\alpha}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{array}\right.$$

définissent $q_1 \dots q_k \; p_1 \dots p_k$ en fonction de $t$ et de $2k$ constantes arbitraires: $a_1 \, a_2 \dots a_k \, a_{k+1} \dots a_{2k}$.

Ces constantes arbitraires doivent être telles, qu'en donnant à $t$ une valeur arbitraire $t_0$, on puisse donner à $p_1 \dots p_k \; q_1 \dots q_k$ des valeurs quelconques. On doit donc pouvoir résoudre le système des équations finies par rapport aux $2k$ constantes. On aura ainsi:

$$a_i = \varphi_i(t, q_1 \, q_2 \dots q_k \; p_1 \, p_2 \dots p_k)$$

c.à.d. une intégrale première des équations canoniques soit en tout $2k$ intégrales premières: car on appelle intégrale première du système une relation de la forme: $C^{te} = \varphi(t, q_1 q_2 \dots q_k \; p_1 p_2 \dots p_k)$ vérifiée identiquement par les $p$ et les $q$ ~~qui satisfont le~~ en vertu de ce système, c.à.d. que $\varphi$ devient identiquement constant quand on y substitue les fonctions $p$ et $q$ qui satisfont le système proposé.

Pour qu'une telle équation soit une intégrale première des équations canoniques du mouvement, il faut donc que $\varphi$ reste constant quand $t$ varie, c.à.d. que: $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} = 0$$

ou, en y substituant les expressions tirées des équations canoniques:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}\right] + \dots \dots + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Cette condition doit être vérifiée identiquement quels que soient les $p$ et les $q$ ; car on peut toujours leur donner des valeurs initiales arbitraires, et cette équation doit être vérifiée pendant tout le mouvement. Donc le 1er membre doit être identiquement nul.

Définition : On pose :
$$\left[\varphi, H\right] = \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

La condition s'écrit alors :
$$\left[\varphi, H\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Si $\varphi$ ne contient pas explicitement le temps, elle se réduit à :
$$\left[\varphi, H\right] = 0.$$

Théorème. Si l'on connaît 2 intégrales premières des équations canoniques : $\varphi = c$ $\psi = c'$

on obtient une 3e intégrale première : $\left[\varphi, \psi\right] = c''$.

Cette proposition a été indiquée en passant par Poisson dans un mémoire sur la variation des constantes arbitraires. Jacobi, dans sa Mécanique, a fait ressortir l'importance de ce théorème, qui consiste en ce fait qu'on peut, sans nouvelle intégration, tirer une 3e intégrale première des 2 premières. Ce résultat peut être illusoire, soit que $\left[\varphi, \psi\right]$ soit identiquement constant, soit que l'équation : $\left[\varphi, \psi\right] = c''$ soit une conséquence des 2 premières, et c'est ce qui arrive souvent. Mais dans certains cas, la nouvelle équation est distincte des 2 premières, et le théorème est alors utile dans l'application.

– Avant de le démontrer, nous établirons quelques propriétés de ce

nouveau symbole.

1° $[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi]$ En effet :

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) = -\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)$$

2° $[\varphi, \varphi] = 0$ Se déduit de 1°; est d'ailleurs évident.

3° $[K\varphi, \psi] = K[\varphi, \psi]$ Chaque terme est multiplié par K. d'où : $(-\varphi, \psi) = -(\varphi, \psi)$

4° $[f\varphi, \psi] = f[\varphi, \psi] + \varphi[f, \psi]$ En effet :

$$\Sigma\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial(f\varphi)}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) = \Sigma\left[f\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \varphi\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \varphi\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right]$$

$$= f\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \varphi\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)$$

5° Prenons la dérivée du crochet par rapport à une des lettres $t$, $p_1 \ldots p_k\ q_1 \ldots q_k$ qui figurent dans $\varphi, \psi$, et que nous appellerons $s$ :

$$\frac{\partial}{\partial s}[\varphi, \psi] = \Sigma\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1 \partial s}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_1 \partial s}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right] + \Sigma\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_1 \partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1 \partial s}\right]$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial s}[\varphi, \psi] = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \psi\right] + \left[\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial s}\right]$$

Règle analogue à celle de la différentiation d'un produit.

6° On a identiquement : $[f, (\varphi, \psi)] + [\varphi, (\psi, f)] + [\psi, (f, \varphi)] = 0$

Cette identité est aisée à vérifier pour les cas particuliers où $K=1$ ou $K=2$ — Dans le cas général, on remarquera d'abord que le 1er membre est une expression linéaire et homogène par rapport

aux dérivées secondes des 3 fonctions, qui sont multipliées dans chaque terme par 2 dérivées premières des 2 autres fonctions ; on vérifiera ensuite que le coefficient de chaque dérivée seconde est nul, les facteurs se détruisant deux à deux. Donc la somme des 3 crochets est identiquement nulle.

De cette identité résulte immédiatement la démonstration du théorème de Poisson. On a par hypothèse :

$$[\varphi, H] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad [\psi, H] + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

Il faut prouver qu'on a en conséquence :

$$[(\varphi, \psi), H] + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = 0$$

Appliquons l'identité précédente aux 3 fonctions $\varphi, \psi, H$.

$$[(\varphi, \psi), H] + [(\psi, H), \varphi] + [(H, \varphi), \psi] = 0$$

Or, en vertu des hypothèses $[\psi, H] = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$ $[H, \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

$$[(\varphi, \psi), H] + \left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right] = 0$$

ou $$[(\varphi, \psi), H] + \frac{\partial[\varphi, \psi]}{\partial t} = 0$$ c. q. f. d.

Théoriquement, le théorème de Poisson peut faire connaître toutes les intégrales premières quand on en connaît deux : il suffit qu'en combinant ces deux premières on en obtienne une 3e distincte, puis qu'en combinant la 3e avec les deux premières, on obtienne de nouvelles intégrales distinctes et ainsi

de suite jusqu'à ce qu'on ait un système complet d'intégrales premières. Mais ce cas, possible en théorie, est entièrement rare. En général, on retrouve bientôt des intégrales identiquement constantes ou des combinaisons des intégrales déjà trouvées.

— Exemple: Mouvement d'un point matériel libre attiré par l'origine proportionnellement à la distance.

Supposons pour simplifier que la masse du point soit 1, et que le coefficient d'attraction soit aussi l'unité. Les équations du mouvement seront:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -y \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -z$$

La fonction des forces est: $V = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

La demi-force vive est: $T = \frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)$

On posera:

$$q_1 = -x \quad q_2 = -y \quad q_3 = -z \qquad p_1 = x' \quad p_2 = y' \quad p_3 = z'.$$

$$H = T - V = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right]$$

Supposons qu'on ait trouvé 2 intégrales des aires:

$$xy' - yx' = \alpha \qquad \text{ou} \qquad q_1p_2 - q_2p_1 = \alpha \qquad (1)$$

$$yz' - zy' = \beta \qquad\qquad q_2p_3 - q_3p_2 = \beta \qquad (2)$$

Vérifions d'abord que ce sont des intégrales premières:

$$[\alpha, H] = p_2p_1 + q_2q_1 - p_1p_2 - q_1q_2 = 0$$

$$[\beta, H] = p_3p_2 + q_3q_2 - p_2p_3 - q_2q_3 = 0$$

On en déduit la 3e intégrale première:

$$[\alpha, \beta] = p_1 q_3 - q_1 p_3 = \gamma \quad (3) \quad [\text{On vérifie: } [\gamma, H] = 0.]$$

C'est une intégrale nouvelle, la 3e intégrale des aires, qui s'écrit:

$$xz' - zx' = \gamma.$$

En combinant cette intégrale avec une des 2 premières, on retrouve l'autre; les 3 intégrales des aires forment donc un système fermé. Il est d'ailleurs évident qu'on ne peut en déduire d'autres intégrales caractérisant le mouvement particulier qu'on étudie, puisque ces intégrales des aires appartiennent à tout mouvement produit par une force centrale.

Pour aller plus loin, il faut donc obtenir une nouvelle intégrale première, par exemple en intégrant la 1e équation du mouvement:

$$2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{d'où:} \quad x^2 + x'^2 = \alpha'$$

qui s'écrit:

$$p_1^2 + q_1^2 = \alpha' \qquad (4)$$

Vérifions que c'est une intégrale première:

$$[\alpha', H] = q_1 p_1 - p_1 q_1 = 0$$

Combinons-la avec l'intégrale (1); on a la nouvelle intégrale:

$$[\alpha, \alpha'] = p_2 p_1 + q_2 q_1 = \beta' \qquad (5)$$

car on trouve, en vérifiant: $[\beta', H] = 0$.

Combinons-la à son tour avec l'intégrale (1); on trouve:

$$[\alpha, \beta'] = p_2^2 + q_2^2 - p_1^2 - q_1^2 = C^{te}$$

En tenant compte de (4), cette intégrale se réduit à:

$$p_2^2 + q_2^2 = C^{te} \qquad (5')$$

Mais elle n'est pas distincte des précédentes, car on a l'identité :

$$(q_1p_2 - p_1q_2)^2 + (p_1p_2 + q_1q_2)^2 = (q_1^2 + p_1^2)(q_2^2 + p_2^2)$$

Donc si $q_1p_2 - p_1q_2$, $p_1p_2 + q_1q_2$, $p_1^2 + q_1^2$ sont constants (1) (5) (4)
on a nécessairement : $p_2^2 + q_2^2 = C^{te}$

On peut remplacer l'intégrale (5) par cette dernière qui lui est équivalente. En combinant les 2 intégrales :

$p_1^2 + q_1^2 = \alpha'$ $\quad$ $p_2^2 + q_2^2 = \beta'$ $\Big\}$ avec (1)(2)(3),

on trouve une 3e intégrale : $p_3^2 + q_3^2 = \gamma'$.

On a en tout 6 intégrales premières déduites de 3 d'entre elles en vertu de la méthode de Poisson. Mais elles se réduisent à 5, car si elles étaient distinctes, on pourrait en tirer $q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3$ en fonction des constantes $\alpha\,\beta\,\gamma\;\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, et on aurait des valeurs constantes déterminées pour les paramètres, c.à.d. que le mouvement serait impossible, ce qui n'a lieu que dans des conditions initiales particulières ($x=0$, $y=0$, $z=0$, $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$.) — D'ailleurs ces 6 équations forment un système fermé, c.à.d. qu'on ne trouve en les combinant que les intégrales déjà connues. — Pour connaître le mouvement, il faut obtenir une intégrale première qui contienne le temps.

Il est aisé de voir que la relation : $x\cos t - x'\sin t = C^{te}$
en est une. Différentions-la en effet par rapport au temps :

$$x'\cos t - x\sin t - x'\cos t - x''\sin t = -(x + x'')\sin t = 0$$

Or la 1e équation du mouvement est : $\quad x + x'' = 0$

On a donc bien l'intégrale première :

$$q_1\cos t - p_1\sin t = C \qquad (6)$$

En la combinant avec les 5 intégrales déjà obtenues, on n'obtient aucune intégrale nouvelle, car on a 6 intégrales premières distinctes qui déterminent le mouvement, c.à.d. $q_1 q_2 q_3 p_1 p_2 p_3$ en fonction de $t$ et des 6 constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', C$. — Pourtant les combinaisons qu'on obtient donnent des intégrales d'une forme avantageuse et simple. Par exemple, en combinant (6) et (4), on trouve:

$$[C, \alpha'] = p_1 \cos t + q_1 \sin t = C_1 \qquad (6')$$

On voit aisément que ce n'est pas une nouvelle intégrale, car en faisant les carrés de cette équation et de (6) et ajoutant, on retrouve (4): $p_1^2 + q_1^2 = C^{te}$.

Mais si l'on résout (6) et (6') par rapport à $p_1 q_1$ on en tire les valeurs de ces paramètres en fonction du temps:

$$q_1 = C \cos t + C_1 \sin t \qquad p_1 = C_1 \cos t - C \sin t$$

De même, en combinant (6) et (5), on trouve:

$$[C, \beta'] = p_2 \cos t + q_2 \sin t = C_2$$

Mais en combinant (6) et (1), on trouve:

$$[\alpha, C] = q_2 \cos t - p_2 \sin t = C'$$

et de ces 2 dernières équations on tire:

$$q_2 = C' \cos t + C_2 \sin t \qquad p_2 = C_2 \cos t - C' \sin t$$

Enfin, en combinant (6) et (3), on trouve:

$$[C, \gamma] = q_3 \cos t - p_3 \sin t = C''$$

Mais en combinant (6) avec $[\alpha, \gamma] = p_1 p_3 + q_1 q_3 = \delta$

on trouve : $[C, \delta] = p_3 \cos t + q_3 \sin t = C_3$

et de ces 2 équations on tire :

$$q_3 = C'' \cos t + C_3 \sin t \qquad p_3 = C_3 \cos t - C'' \sin t$$

On a ainsi $q_1 q_2 q_3 \; p_1 p_2 p_3$, càd. $x\,y\,z,\ x'y'z'$ en fonction du temps ; on retrouve les intégrales connues.

(Pour plus de développements, cf Mécanique de Jacobi ; et : Mécanique de Lagrange, note de M. Bertrand, fin du 1er vol.)

Le principe de Hamilton, qui résume en quelque sorte les équations de Lagrange s'applique aux systèmes comme au point matériel. Soit un système matériel sollicité par des forces dérivant d'une fonction de forces, et même, plus généralement, supposons que les projections des forces données soient les dérivées partielles correspondantes d'une fonction :

$$V(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_n y_n z_n,\ \underline{t})$$

de sorte que les seconds membres des équations de Lagrange soient (V étant devenue une fonction de $q_1 q_2 \ldots q_k$ et $t$) :

$$Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}.$$

La demi-force vive T est en même temps fonction de $q_1 q_2 \ldots q_k$, $q'_1 q'_2 \ldots q'_k$ et $t$. On considère l'intégrale définie

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt$$

On suppose donnés à l'avance les valeurs de $q_1 q_2 \ldots q_k$ correspondant aux 2 valeurs limites $t_0$ et $t_1$, c.à.d. la position du système aux instants $t_0$ et $t_1$. On demande comment il faut faire varier les K paramètres en fonction du temps pour que l'intégrale I soit minima.

Tout déplacement du système de la position initiale à la position finale sera représenté par un système de fonctions du temps $q_1 q_2 \ldots q_k$ prenant aux 2 limites les valeurs assignées. On va prouver que le système de fonctions qui rend minima l'intégrale I est celui qui correspond au déplacement naturel du système se mouvant librement sous l'action des forces données, de sorte qu'on obtiendra les équations de ce mouvement en égalant à 0 la variation de I.

Supposons qu'on ait substitué dans I ce système de fonctions qui correspond au minimum. Si l'on donne aux K paramètres des accroissements quelconques $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_k$, la variation $\delta I$ qui en résulte sera nulle, quels que soient ces accroissements, qui sont seulement assujettis à s'annuler aux 2 limites $t_0$, $t_1$. Quand $q_1$ croît de $\delta q_1$, $q_1'$ croît de $\delta q_1'$ dérivée de $\delta q_1$. Donc:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial q_1'}\delta q_1' + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_k'}\delta q_k'.$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\,dt.$$

Intégrons par parties les termes en $\delta q'_1 \ldots \delta q'_k$ qui figurent dans $\delta I$.

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q'_1} \delta q'_1 \, dt = \left[\frac{\partial T}{\partial q'_1} \delta q_1\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) dt$$

La partie intégrée est nulle, $\delta q_1$ s'annulant aux limites.

En opérant de même pour les autres variations, on trouve :

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_1}\right] \delta q_1 + \ldots\ldots + \left[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_k}\right] \delta q_k \right\} dt$$

Cette variation devant être nulle quels que soient $\delta q_1 \ldots\ldots \delta q_k$, il faut que leurs coefficients soient nuls séparément ; on retrouve ainsi les équations de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ $\alpha = 1, 2, \ldots K.$

Ainsi, égaler à 0 la variation de l'intégrale $I$ : $\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt$ équivaut à écrire les équations du mouvement.

On a par là un moyen symbolique et abrégé de poser ces équations : le problème du mouvement d'un système se trouve ramené à une question de maximum et minimum.

— Le principe de la moindre action s'étend aussi aux systèmes par une généralisation fort simple. Ses conditions d'application sont plus restreintes que celles du principe de Hamilton ; on doit supposer que les liaisons sont indépendantes du temps, et que les forces dérivent d'un potentiel (c.à.d. que la fonction $U$ ne contient pas le temps.) On se rappelle que l'action relative à une courbe passant par 2 points ~~matériels~~ fixes $A, B$ et suivie par un point matériel

est l'intégrale $\int_A^B \sqrt{2(V+h)}\, ds$

prise le long de cette courbe ;

et que la courbe de moindre action est la trajectoire du point libre sollicité par les forces données.

Pour un système de $n$ points matériels, de masses $m_1 m_2 \dots m_n$ décrivant dans un déplacement quelconque des arcs de courbes $s_1\, s_2 \dots\dots s_n$, l'action du système pendant ce déplacement est :

$$A = \int \sqrt{2(V+h)} \sqrt{m_1 ds_1^2 + m_2 ds_2^2 + \dots\dots + m_n ds_n^2}$$

$V$ devient fonction de $q_1 q_2 \dots q_k$ ; on devra exprimer $\Sigma m ds^2$ en fonction les mêmes $K$ paramètres indépendants. C'est :

$\Sigma m(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ Or $dx$ est de la forme :

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} dq_2 + \dots\dots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} dq_k$$

Donc $\Sigma m ds^2$ sera une forme quadratique en $dq_1 \dots dq_k$ :

$$\Sigma m ds^2 = a_{11} dq_1^2 + a_{22} dq_2^2 + \dots\dots + a_{12} dq_1 dq_2 + \dots\dots$$

$$= \Sigma a_{ij}\, dq_i\, dq_j \qquad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1, 2, \dots\dots K.$$

On peut remarquer que : $2T = \Sigma m v^2 = \Sigma m \frac{ds^2}{dt^2}$

Donc : $\Sigma m ds^2 = 2T dt^2$ $\sqrt{\Sigma m ds^2} = \sqrt{2T}\, dt$.

L'intégrale $A$ sera donc : $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(V+h)} \sqrt{2T}\, dt$

On fait correspondre à $t_0$ des valeurs fixes $q_1^0\, q_2^0 \dots q_k^0$ qui définissent la position $P_0$ ; à $t_1$ les valeurs $q_1'\, q_2' \dots\dots q_k'$

qui définissent la position $P_1$. On peut faire passer le système d'une position à l'autre d'une infinité de manières, par une infinité de déformations continues. Chaque déformation sera représentée par certaines fonctions $q_1 q_2 \dots q_k$ du temps prenant aux limites les valeurs assignées : la valeur correspondante de A sera l'action relative à ce déplacement. On prouve comme pour le point matériel, que de tous les déplacements possibles qui amènent le système de la position $P_0$ à la position $P_1$, celui qui donne lieu à la moindre action est celui qui se produit dans le mouvement naturel du système soumis librement aux forces données. (Voir la démonstration dans la Mécanique de Jacobi.)

Nous terminerons par une remarque sur le problème des brachistochrones, qui est, nous l'avons vu pour le point matériel (2e cahier, page 7 ; 3e cahier, pages 16, 41) intimement lié à celui de la moindre action. On va voir que, pour les systèmes, le problème général des brachistochrones se confond avec le problème général de la dynamique.

Considérons un système dont les liaisons ne dépendent pas du temps, dont la position est définie par K paramètres et sollicité par des forces dérivant d'un potentiel $-V$. Étant données 2 positions $P_0$ et $P_1$ de ce système, on demande quelles liaisons il faut ajouter au système pour en faire un système à liaisons complètes qui, abandonné en $P_0$ sans vitesses initiales, arrive en $P_1$ dans le moindre temps possible.

Formons la force vive : $2T = \Sigma a_{ij} \frac{dq_i \, dq_j}{dt^2}$

En vertu du théorème des forces vives, on a :

$T = V + h$

La constante des forces vives a une valeur déterminée par la configuration initiale $P_0$ du système : $h = -V_0$

puisque $T$ est nulle en $P_0$. – On tire de là :

$$dt = \frac{\sqrt{\Sigma a_{ij} \, dq_i \, dq_j}}{\sqrt{2(V+h)}}$$

On cherche le minimum de l'intégrale définie suivante :

$$t = \int_{P_0}^{P_1} \frac{\sqrt{\Sigma a_{ij} \, dq_i \, dq_j}}{\sqrt{2(V+h)}}$$

Or, si on la compare à l'intégrale qui définit l'action :

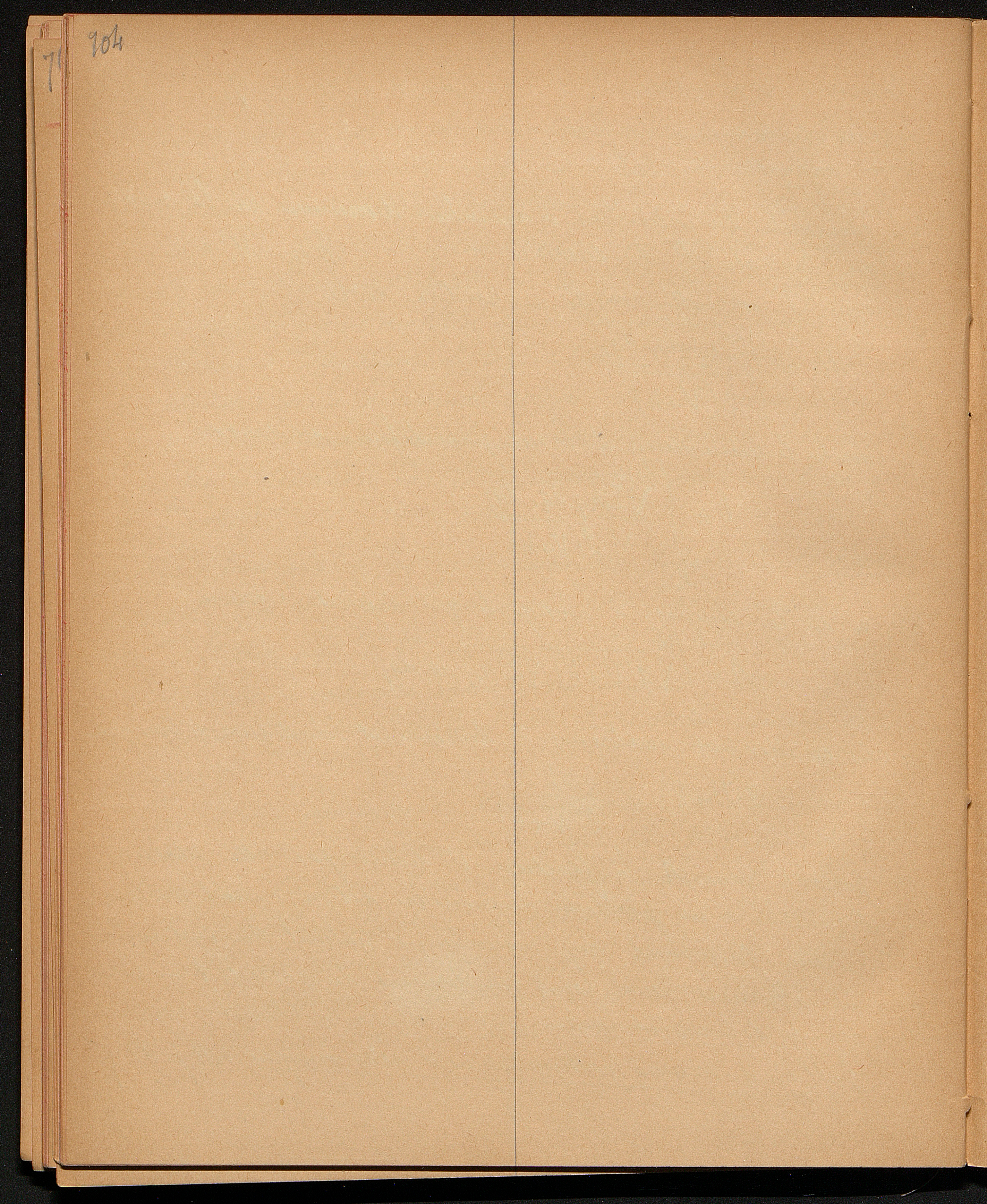
$$A = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(V+h)} \sqrt{\Sigma a_{ij} \, dq_i \, dq_j}$$

on voit qu'elles sont analogues et deviennent identiques si l'on pose :

$$2(V+h) = \frac{1}{2(V+h)}$$

En portant dans $A$ la fonction $V$ définie par cette relation, on est ramené à un problème de moindre action : on sait que le minimum correspond au mouvement naturel du système soumis librement aux forces qui dérivent du potentiel $-V$.

[Sur le principe de la moindre action, v. un Mémoire de Serret, ap. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques t. II, p. 97.]



# Théorie des percussions.

L'expérience nous apprend que la vitesse d'un corps change parfois brusquement sans que sa position change sensiblement au même instant. Ainsi, quand une bille pesante tombe sur un sol résistant, au moment du choc la vitesse change dans un instant inappréciable. — On invoquait autrefois, pour expliquer ce phénomène, des forces instantanées, imprimant en un instant aux corps des vitesses finies, et par suite des accélérations infiniment grandes. Mais cette hypothèse est inutile. Il suffit de supposer que pendant un temps très court des forces très grandes entrent en jeu. Pour reprendre l'exemple précédent, le phénomène du choc commence à l'instant précis où a lieu le contact géométrique de la sphère et du plan matériels. Or, si durs que soient les corps mis en présence, ils se déforment imperceptiblement au point de contact: le plan se creuse, la sphère s'aplatit, et le contact s'étendant à une certaine surface met en jeu des forces moléculaires de plus en plus grandes et nombreuses; ces réactions, très grandes comparées aux forces ordinaires, détruisent progressivement la vitesse de la bille dans un temps extrêmement court: la déformation des 2 corps atteint son maximum quand la vitesse s'annule. Deux cas se présentent alors:

1° Ou bien les corps sont parfaitement mous, c.à.d. ne réagissent pas contre la déformation, et alors tout reste en repos dans l'état final de déformation où les corps se trouvent à l'instant où la vitesse s'annule; l'équilibre et le contact persistent indéfiniment;

2° Ou bien les corps sont plus ou moins élastiques, c.à.d. tendent à

reprendre leur forme primitive, et alors les réactions moléculaires tendent à séparer les 2 corps comprimés et restituent à la bille une partie de sa vitesse dans le sens répulsif; toute sa vitesse dans l'hypothèse où les corps mis en présence sont parfaitement élastiques. La bille s'éloigne progressivement et les corps reprennent leur forme jusqu'à ce que le contact géométrique ait lieu; à cet instant, les 2 corps se séparent; la bille, étant animée de la vitesse qu'elle doit à l'élasticité, se meut dès lors librement.

Sans étudier les déformations imperceptibles des corps dans les chocs, on cherche, et l'on peut trouver, une relation entre l'état des corps avant le choc et leur état après le choc; c'est l'étude de ces relations, indépendamment des causes de la variation des vitesses, c.à.d. des forces d'élasticité mises en jeu par ces déformations, qui constitue la théorie des percussions.

Considérons un point matériel soumis à 3 forces par exemple; les équations de son mouvement seront:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X' + X''$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y' + Y''$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z' + Z''$$

Supposons le mouvement connu c.à.d. ces équations intégrées; on pourra exprimer les forces en fonction du temps. En intégrant les 2 membres de la 1° équation entre les instants $t_0$ et $t_1$, on aura

$$\left(m\frac{dx}{dt}\right)_1 - \left(m\frac{dx}{dt}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt + \int_{t_0}^{t_1} X'\,dt + \int_{t_0}^{t_1} X''\,dt$$

Si les forces $X$, $X'$, $X''$ sont des forces ordinaires, comme les poids,

et du même ordre de grandeur, en supposant l'intervalle $(t_1 - t_0)$ très petit, les intégrales précédentes seront très petites et de l'ordre de $(t_1 - t_0)$. Mais supposons que la 1e force $(X, Y, Z)$ devienne très grande dans l'intervalle très court $(t_0, t_1)$, et soit de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$. La 1e intégrale prendra alors une valeur finie, et la variation de la vitesse du point, dans le même laps de temps, au lieu d'être très petite, deviendra une quantité finie. Les autres intégrales auront une valeur négligeable en comparaison de la 1e, de sorte qu'on pourra les supprimer dans une première approximation, d'autant plus exacte que l'intervalle $(t_0, t_1)$ sera plus petit.

D'autre part, la position du point matériel variera très peu dans ce laps ~~de temps~~, car sa vitesse étant finie, son déplacement sera de l'ordre de $(t_1 - t_0)$ et infiniment petit comme cet intervalle. Donc, en considérant le point comme immobile pendant ce court laps de temps et en négligeant les forces ordinaires, on ne commet pas d'erreur sensible. On définira donc le choc ou la percussion comme le déploiement d'une force très grande en un instant très court, et on admettra que pendant ce phénomène le point matériel ~~change brusquement~~ éprouve une variation finie de vitesse sans changer de position, et que les effets des forces ordinaires sur ce point sont nuls.

En vertu de ces conventions, on aura les équations :

$$\left[m\frac{dx}{dt}\right]_0^1 = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt \qquad \left[m\frac{dy}{dt}\right]_0^1 = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt \qquad \left[m\frac{dz}{dt}\right]_0^1 = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt$$

qui caractérisent une percussion produite par la force $(X, Y, Z)$

On mesure une percussion par son effet, c.à.d. par la variation de la quantité de mouvement. Soit par exemple $Q_0$ le vecteur qui représente dans l'espace la quantité de mouvement du point à l'instant $t_0$ : $mv_0$

et $Q_1$ sa quantité de mouvement à l'instant $t_1$ : $mv_1$

On aura dans l'espace la relation géométrique $(Q_1) - (Q_0) = (P)$

P étant le vecteur qui représentera la percussion imprimée au point M. On voit que la quantité de mouvement finale $Q_1$ est la somme géométrique de la percussion P et de la quantité de mouvement initiale $Q_0$. Soient a, b, c les projections du vecteur P sur les 3 axes ; ils sont respectivement égaux à :

$$\left[m\frac{dx}{dt}\right]_0^1 \qquad \left[m\frac{dy}{dt}\right]_0^1 \qquad \left[m\frac{dz}{dt}\right]_0^1$$

et l'on a les relations :

$$a = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt \qquad b = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt \qquad c = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt$$

qui traduisent en projections la relation géométrique précédente.

Composition des percussions. — Si l'on fait agir sur un point matériel 2 percussions simultanées, l'effet est identique à celui d'une percussion égale à leur somme géométrique.

Soit la percussion précédente et une 2e percussion donnée :

$$a' = \int_{t_0}^{t_1} X'\,dt \qquad b' = \int_{t_0}^{t_1} Y'\,dt \qquad c' = \int_{t_0}^{t_1} Z'\,dt$$

Les équations du mouvement du point seront :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X' \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y' \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z'$$

Intégrons-les de $t_0$ à $t_1$, intervalle très-court pendant lequel a lieu la double percussion :

$$\left[m\frac{dx}{dt}\right]_0^1 = a + a' \qquad \left[m\frac{dy}{dt}\right]_0^1 = b + b' \qquad \left[m\frac{dz}{dt}\right]_0^1 = c + c'$$

Ainsi la variation de la quantité de mouvement est la même que celle que produirait la percussion unique ayant pour projections :

$(a+a')$, $(b+b')$, $(c+c')$, qui est la résultante des 2 percussions données, suivant la règle du parallélogramme des forces.

Donc la composition des percussions se fait comme celle des forces.

Comme la dynamique, la théorie des percussions s'applique aux systèmes de points matériels. On distinguera les percussions, comme les forces, en percussions intérieures et extérieures ; ou bien en percussions données et percussions de liaison.

On étendra aux percussions les théorèmes généraux de la dynamique en intégrant, comme nous l'avons déjà fait ci-dessus, les équations générales du mouvement dans l'intervalle très court $(t_0, t_1)$ où se produit le choc. On considérera le système comme immobile dans ce laps de temps, c.à.d les coordonnées comme constantes, et on les fera sortir des signes de intégration. On regardera comme nulles les forces ordinaires, dont l'effet, avons-nous dit, est négligeable en comparaison des percussions. On aura ainsi des relations géométriques entre l'état des vitesses à l'instant $t_0$ et l'état des vitesses à l'instant $t_1$, d'où l'on pourra conclure le mouvement résultant.

La mécanique des percussions se présente donc comme une application de la dynamique des systèmes, mais elle est plus simple, parce qu'on ne considère que 2 instants très voisins du mouvement entre lesquels la position du système ne change pas, sans étudier ce qui se passe dans leur intervalle. On cherche simplement à déterminer les vitesses finales des points du système, connaissant leurs vitesses initiales et les percussions qu'ils subissent dans le laps de temps $(t_0, t_1)$

Nous allons voir par exemple ce que devient le théorème des projections des quantités de mouvement appliqué aux percussions. Il se traduit par l'équation:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma X_e$$

Supposons qu'entre les instants $t_0$ et $t_1$ le système subisse certaines percussions, c.à.d. que certaines des forces $X_e$ extérieures deviennent très grandes; en intégrant on aura:

$$a_e = \int_{t_0}^{t_1} X_e \, dt$$

d'où:

$$\left[\Sigma m \frac{dx}{dt}\right]_0^1 = \Sigma a_e$$

Le 2e membre contenant uniquement les projections des percussions.

Donc: La variation de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe est égale à la somme des projections des percussions extérieures sur cet axe. — On peut écrire aussi:

$$\Delta \Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma a_e$$

$\Delta$ représentant la variation de $t_0$ à $t_1$ de la quantité qui suit.

On pourrait interpréter ce théorème, comme en dynamique, en supposant les masses concentrées au centre de gravité du système, et les percussions appliquées à ce centre de gravité; on aurait ainsi le théorème du mouvement du centre de gravité pour les percussions.

Transformons de même le théorème des moments des quantités de mouvement, qui s'exprime par la formule:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum\left(xY_e-yX_e\right)$$

En supposant que quelques-unes des forces extérieures deviennent très-grandes dans l'intervalle $(t_0, t_1)$ et en appelant $a_e$, $b_e$, $c_e$ les projections des percussions correspondantes, il vient:

$$\Delta\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum\left(xb_e-ya_e\right)$$

Donc: La variation de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe est égale à la somme des moments des percussions extérieures par rapport à cet axe.

Chaque équation de la dynamique donne lieu, par une transformation semblable, à une équation analogue pour les percussions.

Problème: Choc direct de deux sphères.

Soient 2 sphères, de masses $m$, $m'$, dont les centres se meuvent sur une même ligne droite, avec des vitesses respectives $v$, $v'$. Quand les sphères arrivent au contact il y a choc; on demande les vitesses respectives $u$, $u'$ des 2 sphères après le choc (on suppose les vitesses constantes), ou bien que $v$, $v'$ sont les valeurs de ces vitesses immédiatement avant le choc, et $u$, $u'$ leurs valeurs immédiatement après.)

Il n'y a pas de percussion extérieure au système des 2 sphères: donc la variation de la somme des projections des quantités de mouvement sur la droite des centres $Ox$ sera nulle: $\Delta\sum m\frac{dx}{dt}=0$

On pouvait d'ailleurs affirmer, en vertu des seuls principes de la dynamique, que la quantité de mouvement du système est constante,

puisqu'aucune force extérieure n'agit sur lui. On a donc

$$\left[\Sigma m \frac{dx}{dt}\right]_0 = \left[\Sigma m \frac{dx}{dt}\right] \quad \text{ou:} \quad mv + m'v' = mu + m'u'$$

Cela revient à dire que la vitesse du centre de gravité reste la même, car cette vitesse est:

$$V = \frac{mv + m'v'}{m+m'}$$

Telle est la relation que fournit entre les vitesses la théorie des percussions. Pour obtenir une autre équation, il faut faire une hypothèse sur la nature des corps.

1° Si les corps sont parfaitement mous, ils resteront en contact (par définition), c.à.d. que:

$$u = u'$$

On en conclut immédiatement:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m+m'} = V$$

La vitesse commune des 2 sphères après le choc est la vitesse (constante) du centre de gravité.

On va prouver que dans ce cas il y a perte de force vive. En effet, le choc ne dépend que de la vitesse relative des 2 sphères, et cette vitesse ne change pas si l'on donne à tout le système une vitesse de translation $\alpha$ suivant l'axe: donc la variation de force vive, si elle a lieu, sera la même. Cette variation est, dans les conditions données:

$$mv^2 + m'v'^2 - (m+m')V^2$$

On ne change rien à cette expression en remplaçant $v$ par $(v-\alpha)$, $v'$ par $(v'-\alpha)$, $V$ par $(V-\alpha)$; il suffirait de substituer pour voir disparaître les termes en $\alpha$. Si en particulier on fait $\alpha = V$, la perte de force vive sera toujours la même, et s'écrira:

$$m(v-V)^2 + m'(v'-V)^2$$

quantité essentiellement positive. — Il y a donc toujours perte de force vive dans le cas du choc direct de 2 corps parfaitement mous (du moins en

ne considérant que le mouvement perceptible)

On vérifie ainsi dans un cas particulier le principe de Carnot, que nous démontrerons plus loin — La percussion se produit quand une nouvelle liaison s'introduit brusquement dans le système. En effet, les 2 sphères, d'abord indépendantes, arrivent en contact; l'impénétrabilité de leurs surfaces constitue une liaison. De plus cette liaison persiste après le choc, puisque les 2 sphères restent en contact. Dans ces conditions, le principe de Carnot énonce que la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues — Et en effet, la vitesse perdue par l'une des sphères est: $\pm(v-V)$, la vitesse perdue par l'autre sphère est: $\mp(v'-V)$ et la force vive perdue est bien:

$$m(v-V)^2+m'(v'-V)^2$$

2° Si les corps sont parfaitement élastiques, il n'y a pas (par définition) de perte de force vive. Les 2 corps se séparent donc après le choc, en vertu de leur élasticité. On a les 2 équations:

$$mv+m'v' = mu+m'u' \qquad \text{ou} \qquad m(v-u) = m'(u'-v')$$

$$mv^2+m'v'^2 = mu^2+m'u'^2 \qquad \qquad m(v^2-u^2) = m'(u'^2-v'^2)$$

d'où: $v+u = v'+u'$ ou: $v-v' = u'-u$

La vitesse relative des 2 sphères reste la même en changeant de signe au moment du choc — Posons: $u = v'+\alpha$ $u' = v+\alpha$

et substituons dans la 1^e équation, qui devient une équation en $\alpha$:

$$mv+m'v' = mv'+m\alpha+m'v+m'\alpha$$

$$(m-m')(v-v') = (m+m')\alpha$$

$$\alpha = \frac{m-m'}{m+m'}(v-v')$$

d'où: $u$, $u'$.

Cas particulier : Si les masses sont égales : $m = m'$,
on a : $\alpha = 0$, donc : $u = v'$, $u' = v$.

Dans ce cas, les 2 sphères ne font qu'échanger leurs vitesses au moment du choc. Elles semblent se croiser et continuer leur mouvement indépendamment l'une de l'autre.

— Entre les 2 cas extrêmes que nous venons d'étudier, et qui sont purement idéaux, on peut intercaler une infinité de cas intermédiaires pour se rapprocher de ce qui se passe dans la réalité, et cela d'une foule de manières différentes, en faisant des hypothèses qui concordent autant que possible avec les faits observés.

On peut par exemple avec Newton, admettre que la vitesse relative des 2 corps change de sens en se réduisant dans un certain rapport au moment du choc : $u' - u = K(v - v')$ $\quad 0 < K < 1$

On retrouverait les 2 cas étudiés plus haut en faisant : $K = 0$, $K = 1$.

On trouve aisément, dans cette hypothèse, que la perte de force vive est égale à celle qui aurait lieu dans le cas des corps parfaitement mous, multipliée par un facteur qui ne dépend que du coefficient $K$ :

$$(1 - K^2) \cdot \frac{mm'}{m+m'}(v - v')^2$$

— Etude des percussions sur un corps solide mobile autour d'un axe fixe.

Soit l'axe $Oz$ fixé par le point $O$ et le point $O'$ à la distance $h$ de $O$.

Supposons qu'on imprime au solide plusieurs percussions simultanées : $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ ..... aux points $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ ....

On peut regarder ce solide comme libre, à condition de lui appliquer les

réactions des 2 points fixes : ces forces de réaction devront être très grandes comme les forces directement appliquées, donc elles donneront lieu à des percussions de liaison $P(\alpha, \beta, \gamma)$ et $P'(\alpha', \beta', \gamma')$.

La vitesse angulaire de rotation du corps autour de l'axe fixe est $\omega_0$ avant, et $\omega_1$ après les percussions. La variation de vitesse :

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ s'effectue en un instant, pendant lequel le corps ne change pas de place. Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement à l'axe fixe $Oz$ : la quantité de mouvement du corps par rapport à $Oz$ est $Mk^2\omega$, $Mk^2$ étant son moment d'inertie par rapport à cet axe. Donc :

$$Mk^2 \Delta\omega = \Sigma(bx - ay)$$

car les moments des forces de liaison sont nuls. On en tire :

$$\Delta\omega = \frac{\Sigma(bx-ay)}{Mk^2}$$

On peut se proposer ensuite de calculer les percussions de liaison $P, P'$, en écrivant les équations que donnent le théorème des projections et celui des moments des quantités de mouvement :

$$\Delta \Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma a + \alpha + \alpha'$$

$$\Delta \Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma b + \beta + \beta'$$

$$\Delta \Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma c + \gamma + \gamma'$$

$$\Delta \Sigma m\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(cy - bz) - h\beta'$$

$$\Delta \Sigma m\left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) = \Sigma(az - cx) + h\alpha'$$

$$\left[\Delta \Sigma m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \Sigma(bx - ay)\right]$$

La dernière nous a donné $\Delta\omega$. Les 5 autres déterminent $\alpha', \beta'$, puis $\alpha, \beta$, et seulement $(\gamma+\gamma')$. C'est le même résultat que nous avons trouvé pour les forces ordinaires, tant en statique qu'en dynamique.

On peut simplifier ces équations en tenant compte du mouvement particulier du corps : le paramètre variable est $\theta$, angle décrit autour de $Oz$ ; $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ - On a les formules :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait qu'une percussion directement appliquée ; les équations deviennent :

$$-\Sigma my\,\Delta\omega = a+\alpha+\alpha' \qquad -\Sigma mxz\,\Delta\omega = cy - bz - h\beta'$$

$$\Sigma mx\,\Delta\omega = b+\beta+\beta' \qquad -\Sigma myz\,\Delta\omega = az - cx + h\alpha'$$

$$0 = c+\gamma+\gamma' \qquad [Mk^2\Delta\omega = bx - ay]$$

Peut-il arriver que l'axe ne supporte aucune percussion, c.à.d. que les percussions de liaison soient nulles ? Pour le savoir, il faut faire dans les équations précédentes : $\alpha = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ et examiner quelles conditions elles expriment.

La 3e montre immédiatement qu'il faut d'abord que $c = 0$ c.à.d. que la percussion soit perpendiculaire à l'axe. Supposons cette condition remplie, et prenons pour plan des $xy$ le plan perpendiculaire à l'axe qui contient la percussion ; menons l'axe $Oy$ parallèlement à cette percussion ; ses projections seront $(0, b, 0)$ et son point d'application aura pour coordonnées $(x, 0, 0)$ si on l'applique au p.t $A$ où elle traverse $Ox$ : $OA = x$.

Faisons $a = 0$ dans la 1e équation :

$$\Sigma my = 0$$

Cette condition exprime que le centre de gravité G du corps est dans le plan des $xz$. – La 4e et la 5e équations donnent d'autre part :

$$\Sigma mxz = 0 \qquad \Sigma myz = 0$$

ce qui signifie que l'axe Oz doit être un axe principal d'inertie relatif au point O. La 2e équation donne, en posant : $\Sigma mx = M\xi$,

$$M\xi \Delta\omega = b \qquad \text{avec la 6e :} \qquad Mk^2 \Delta\omega = bx$$

L'intensité $b$ de la percussion étant supposée arbitraire, éliminons-la ; il reste la condition :

$$\frac{k^2}{\xi} = x$$

qui peut s'interpréter géométriquement. Si l'on considère le corps solide comme pesant et qu'on le fasse osciller autour de l'axe Oz disposé horizontalement, la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé sera : $\frac{k^2}{\xi}$.

Donc le point A doit se trouver sur l'axe d'oscillation qui correspond à l'axe de suspension Oz. – En résumé, pour que l'axe ne supporte aucune percussion, quelle que soit l'intensité de la percussion appliquée au corps, il faut que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie pour un de ses points, O ; que la percussion soit perpendiculaire au plan de cet axe et du centre de gravité, et qu'elle perce ce plan au point d'intersection de l'axe d'oscillation correspondant à Oz et de la perpendiculaire à Oz en O. Le point A se trouve déterminé.

Nous allons étudier le cas particulier d'un corps infiniment mince ou dont on peut négliger l'épaisseur, comme une plaque. Considérons un corps sans épaisseur situé dans le plan des $xz$. On va montrer qu'il existe toujours un point A correspondant à un axe quelconque $Oz$ de son plan: ce point s'appellera le centre de percussion relatif à $Oz$.

Cherchons d'abord à quelle condition l'axe $O'z$ sera axe principal d'inertie pour un de ses points $O'$: posons: $z_1 = OO'$. Menons les axes $O'x'$, $O'y'$ parallèles à $Ox$, $Oy$: on a les nouvelles coordonnées: $x' = x \quad y' = y$

$$z' = z - z_1$$

Pour que $Oz$ soit axe principal d'inertie relatif à $O'$, il faut que: $\Sigma m x' z' = 0 \qquad \Sigma m y' z' = 0$

Cette dernière condition est remplie par hypothèse, puisque $y' = 0$ pour tous les points du corps. La première peut s'écrire:

$$\Sigma m x (z - z_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma m x z - z_1 \Sigma m x = 0$$

d'où l'on tire:

$$z_1 = \frac{\Sigma m x z}{\Sigma m x}$$

La valeur de $z_1$ est ainsi déterminée, sauf dans le cas où $\Sigma m x = 0$, c.à.d. où le centre de gravité serait sur l'axe des $z$. On a donc la position de $O'$; on mènera par $O'$ une perpendiculaire à $Oz$, et on prendra sur cette droite:

$$O'A = x_1$$

~~$x_1$ étant~~ déterminé par la formule : $x_1 = \frac{k^2}{\xi}$.

Transformons cette valeur de $x_1$ : $Mk^2 = \Sigma mx^2$ $\quad M\xi = \Sigma mx$

$x_1 = \frac{\Sigma mx^2}{\Sigma mx}$ Posons : $mx = m'$ Il vient :

$$x_1 = \frac{\Sigma m'x}{\Sigma m'} \qquad z_1 = \frac{\Sigma m'z}{\Sigma m'}$$

Ces formules montrent que A serait le centre de gravité du système de même forme, dont la masse serait $m' = mx$, c.à.d. du système qu'on obtiendrait en multipliant la masse de chaque point par sa distance à l'axe (prise avec son signe, ce qui donnerait lieu à des masses négatives.) On retrouve ainsi la définition donnée auparavant du centre de pression ou de percussion (cf 1er cahier, fin.)

On calculerait aisément, par des intégrales simples, le centre de percussion d'une plaque rectangulaire mobile autour d'un de ses côtés : on trouvera qu'il est aux deux tiers de la perpendiculaire élevée au milieu de ce côté.



— On pourrait obtenir pour les percussions des équations analogues à celles de Lagrange, en intégrant celles-ci entre $t_0$ et $t_1$, comme nous l'avons indiqué (page 109.)

Nous allons établir un principe analogue au principe d'Alembert, par les mêmes raisonnements qui nous ont conduit à celui-ci.

Considérons un point matériel soumis à K percussions simultanées :

on aura les équations suivantes :

$$\Delta m \frac{dx}{dt} = a + a' + \dots + a^{(k)}$$

$$\Delta m \frac{dy}{dt} = b + b' + \dots + b^{(k)}$$

$$\Delta m \frac{dz}{dt} = c + c' + \dots + c^{(k)}$$

qu'on peut écrire :

$$-\Delta m \frac{dx}{dt} + a + a' + \dots + a^{(k)} = 0$$

$$-\Delta m \frac{dy}{dt} + b + b' + \dots + b^{(k)} = 0$$

$$-\Delta m \frac{dz}{dt} + c + c' + \dots + c^{(k)} = 0$$

Sous cette nouvelle forme, ces équations expriment qu'il y a équilibre entre les vecteurs qui représentent les percussions et le vecteur qui a pour projections : $-\Delta m \frac{dx}{dt}$, $-\Delta m \frac{dy}{dt}$, $-\Delta m \frac{dz}{dt}$.

Le vecteur R est ce qu'on appelle la quantité de mouvement perdue par le point. Soit $V_0$ la vitesse du point immédiatement avant les percussions, $V_1$ sa vitesse immédiatement après ; la vitesse perdue par le point est la différence géométrique : $(V_0) - (V_1) = W$.

Ses projections sont : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dx}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dy}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dz}{dt}\right)_1$

c.à.d. $-\Delta \frac{dx}{dt}$, $-\Delta \frac{dy}{dt}$, $-\Delta \frac{dz}{dt}$ $\left[\Delta = [\ ]_1^0\right]$

Le produit $mW$ sera la quantité de mouvement perdue et aura pour projections : $-\Delta m \frac{dx}{dt}$, $-\Delta m \frac{dy}{dt}$, $-\Delta m \frac{dz}{dt}$.

Considérons maintenant un système matériel assujetti à certains

liaisons. Supposons qu'à un instant donné on imprime des percussions aux divers points du système ; on pourra se proposer de calculer la vitesse perdue et la quantité de mouvement perdue par chaque point. Or chaque point éprouve à la fois les percussions données et des percussions de liaison. En vertu du principe précédent, il y aura équilibre en chaque point entre les percussions subies et la quantité de mouvement perdue. c.à.d. (en vertu du principe des vitesses virtuelles) que si l'on imprime au système un déplacement virtuel quelconque, la somme des travaux virtuels des quantités de mouvement perdues et de toutes les percussions sera nulle. Mais si en particulier on imprime au système un déplacement virtuel compatible avec les liaisons au moment des percussions, la somme des travaux des percussions de liaison sera nulle (comme la somme des travaux des forces de liaison.) Il suffit donc d'écrire que la somme des travaux des quantités de mouvement perdues et des percussions directement appliquées est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons : d'où l'équation générale :

$$\Sigma\left[\left(-\Delta m\frac{dx}{dt}\right)\delta x-\left(\Delta m\frac{dy}{dt}\right)\delta y-\left(\Delta m\frac{dz}{dt}\right)\delta z+a\delta x+b\delta y+c\delta z\right]=0$$

analogue à l'équation générale de la dynamique. En particularisant le déplacement virtuel, on retrouverait, comme en dynamique, les théorèmes des projections et des moments des quantités de mouvement.

— Nous avons déjà distingué les percussions directement appliquées et celles qui proviennent de l'introduction de nouvelles liaisons ; par exemple le choc de 2 sphères solides équivaut à une nouvelle liaison qui apparaît au moment de leur contact. Soit un autre exemple :

2 points matériels reliés par un fil inextensible, flexible et sans masse se meuvent comme s'ils étaient indépendants tant que le fil reste lâche; mais au moment où il se tend, ils éprouvent 2 percussions égales et opposées (en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction)

Supposons qu'il n'y ait pas de percussions directement appliquées au système, càd que toutes les percussions qu'il subit proviennent de nouvelles liaisons – L'équation générale se réduira à :

$$\Sigma\left[\left(\Delta m \frac{dx}{dt}\right)\delta x + \left(\Delta m \frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\Delta m \frac{dz}{dt}\right)\delta z\right] = 0$$

et devra avoir lieu pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons au moment du choc, tant anciennes que nouvelles. Supposons de plus, que toutes les liaisons introduites au moment du choc (et qui produisent les percussions) subsistent après le choc.

Dans ces conditions, on peut énoncer le théorème de Carnot :

La force vive perdue par le système est égale à la force vive qui correspond aux vitesses perdues.

En effet, dans l'hypothèse de liaisons persistantes après le choc, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons comprennent évidemment le déplacement réel qu'éprouve le système. On peut donc prendre pour $\delta x, \delta y, \delta z$ les projections du déplacement réel, càd faire : $\delta x = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 dt \quad \delta y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 dt \quad \delta z = \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 dt$

On a donc l'égalité suivante :

$$\Sigma\left[\left(\Delta m \frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + \left(\Delta m \frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + \left(\Delta m \frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)_1\right] = 0$$

qui est identique à : $\Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m w^2$

comme nous allons le vérifier.

$$\left(\Delta m\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = m\left(\frac{dx}{dt}\right)_1^2 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$$

Or :

$$v_0^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0^2 \qquad v_1^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_1^2$$

$$W^2 = \left(\frac{dx}{dt_0} - \frac{dx}{dt_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt_0} - \frac{dy}{dt_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt_0} - \frac{dz}{dt_1}\right)^2$$

$$\sum m(W^2 + v_1^2 - v_0^2) = 2\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_1^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_1^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dy}{dt}\right)_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dz}{dt}\right)_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_1\right]$$

Le 2e membre est nul, en vertu de l'égalité trouvée ci-dessus ;

donc : $\sum m(W^2 + v_1^2 - v_0^2) = 0 \qquad \sum mW^2 = \sum mv_0^2 - \sum mv_1^2$

$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2$ est la force vive perdue par le système de $t_0$ à $t_1$ ; $\sum mW^2$ est la force vive due aux vitesses perdues dans le choc ($W$) ; le théorème est donc démontré, dans l'hypothèse de percussions provenant uniquement de liaisons nouvelles qui persistent après le choc.

Ce théorème est surtout utile dans le cas où le système constitué par les liaisons nouvelles est un système à liaisons complètes : sa vitesse finale ne dépend que d'un paramètre, et le principe de Carnot fournit une équation qui détermine ce paramètre. Il est d'un emploi analogue à celui du théorème des forces vives dans la dynamique.

<u>Exemple</u> : Soit une poulie tournant dans un plan vertical avec une vitesse angulaire donnée $\omega_0$, sur laquelle s'enroule un fil sans masse attaché à un point matériel pesant situé dans la verticale de la gorge

Au moment où le fil se tend, il se produit un choc; on demande la vitesse de la poulie après ce choc.

On se trouve dans les conditions du principe de Carnot, et il suffit de l'appliquer pour résoudre le problème. Soit $\omega_1$ la vitesse angulaire de la poulie après le choc. La vitesse du point avant le choc est: $V_0 = 0$, après le choc: $V_1 = R\omega_1$

en vertu de la liaison. Soit $\mu$ le moment d'inertie de la poulie; la force vive perdue par la poulie est: $\mu\omega_0^2 - \mu\omega_1^2$

la force vive perdue par le point est: $mV_0^2 - mV_1^2 = -mR^2\omega_1^2$

D'autre part, calculons la force vive due aux vitesses perdues. Soit un point de la poulie, à la distance $r$ du centre O; sa vitesse perdue est: $r(\omega_0 - \omega_1)$

La force vive due aux vitesses perdues par la poulie est donc:

$$\Sigma mr^2(\omega_0 - \omega_1)^2 = \mu(\omega_0 - \omega_1)^2$$

on voit que c'est la force vive qui correspond à la vitesse angulaire perdue.

D'autre part, la vitesse perdue par le point M est: $W = -V_1$

et la force vive correspondante est: $mR^2\omega_1^2$

On a donc, en vertu du principe de Carnot, l'équation:

$$\mu\omega_0^2 - \mu\omega_1^2 - mR^2\omega_1^2 = \mu(\omega_0 - \omega_1)^2 + mR^2\omega_1^2 \quad \text{ou:}$$

$$0 = 2\mu\omega_1^2 + 2mR^2\omega_1^2 - 2\mu\omega_0\omega_1 \qquad \mu\omega_1 + mR^2\omega_1 = \mu\omega_0$$

d'où: $\omega_1 = \dfrac{\mu\omega_0}{\mu + mR^2}$ $\qquad \omega_1 < \omega_0$

On peut résoudre plus simplement ce problème en appliquant les théorèmes généraux. Il se produit une double percussion au moment où le fil se tend : en A, une percussion P ; en M, une percussion égale et opposée, −P. Appliquons séparément aux 2 corps les théorèmes des projections et des quantités de mouvement (et des moments) :

$$\Delta \mu\omega = \mu \Delta\omega = -RP \qquad \Delta mv = mv_1 = P$$

$$\mu(\omega_1 - \omega_0) + Rmv_1 = 0 \qquad \mu(\omega_1 - \omega_0) + R^2 m\omega_1 = 0$$

d'où l'on tire encore : $\omega_1 = \dfrac{\mu\omega_0}{\mu + mR^2}$

Cette méthode fait connaître de plus la percussion subie par le fil, c.à.d. la tension instantanée à laquelle il est soumis : $P = mv_1$.

Pendule balistique. La théorie des percussions (cas d'un corps mobile autour d'un axe fixe) trouve son application dans un appareil destiné à mesurer la vitesse des projectiles.

Cet instrument se compose d'un récepteur en fonte mobile autour d'un axe horizontal O et rempli de terre ou d'une autre matière molle. Dans la position d'équilibre son centre de gravité G se trouve verticalement au-dessous de l'axe O, à une distance : $OG = l$.

Le projectile, lancé horizontalement et perpendiculairement à l'axe

s'enfonce dans la terre et fait corps avec l'instrument, qu'il met en mouvement : soit $a$ sa distance à l'axe quand il s'arrête dans le récepteur. Le pendule s'écarte de la verticale d'un certain angle maximum $\theta$ que mesure un curseur. On demande d'en déduire la vitesse du projectile.

Cette question en contient 2 autres qu'il faut traiter successivement.
1° un problème de percussion : quelle est la vitesse angulaire du pendule immédiatement après la percussion ?
Avant la percussion, la vitesse angulaire du pendule est : $\omega_0 = 0$
et la vitesse du projectile est : $V_0$ (inconnue.)
Après la percussion, la vitesse angulaire du pendule est $\omega_1$,
et ~~cette~~ la vitesse du projectile est : $V_1 = a\omega_1$
puisqu'il fait corps avec le pendule. On cherche $\omega_1$ en fonction de $V_0$ — On pourrait appliquer le principe de Carnot ; mais on peut procéder plus simplement. Prenons les moments des quantités de mouvement du système formé par le pendule et le projectile, par rapport à l'axe O. Les seules percussions extérieures proviennent de l'axe fixe, mais leurs moments sont nuls ; donc la somme des moments des percussions est nulle, et par suite la variation de la somme des moments des quantités de mouvement, ce qui veut dire que cette somme est constante. Or, avant le choc, le moment de la quantité de mouvement du pendule est nul, et celui du projectile est : $maV_0$
Après le choc, le moment de la quantité de mouvement du système, animé (en bloc) de la vitesse angulaire $\omega_1$, est :

$\left[Mk^2+ma^2\right]\omega_1$. $\qquad ma v_0 = (Mk^2+ma^2)\omega_1$

d'où l'on tire immédiatement : $\qquad \omega_1 = \dfrac{ma v_0}{Mk^2+ma^2}$

Telle est la solution du problème de percussion.

2° Un problème de dynamique : Un pendule composé étant lancé à partir de sa position d'équilibre avec la vitesse angulaire $\omega_1$, trouver son angle d'écart maximum.

On demande une relation entre $\theta$ et $\omega_1$. Or, soit $G'$ le centre de gravité du système total après le choc ; soit : $OG' = l'$

$$(M+m)l' = Ml + ma \qquad l' = \frac{Ml+ma}{M+m}$$

Le centre de gravité s'élèvera d'une hauteur $h$ qui est :

$$h = l' - l'\cos\theta = l'(1-\cos\theta) = 2l'\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Appliquons le principe des forces vives, et écrivons que la variation de la force vive totale est égale au travail des forces extérieures c.à.d. du poids. Or la force vive finale pour l'angle maximum d'écart $\theta$, est nulle ; la force vive initiale est : $(Mk^2+ma^2)\omega_1^2$

On a donc : $\qquad -(Mk^2+ma^2)\omega_1^2 = -2(M+m)gh$

ou : $\quad (Mk^2+ma^2)\omega_1^2 = 4(M+m)gl'\sin^2\frac{\theta}{2} = 4g(Ml+ma)\sin^2\frac{\theta}{2}$

d'où l'on tire : $\qquad \omega_1 = 2\sqrt{\dfrac{g(Ml+ma)}{Mk^2+ma^2}}\sin\dfrac{\theta}{2}.$

Rapprochons cette relation de celle qui donne l'inconnue $v_0$ :

$$v_0 = \frac{Mk^2+ma^2}{ma}\omega_1 \qquad v_0 = \frac{2}{ma}\sqrt{g(Ml+ma)(Mk^2+ma^2)}\,\sin\frac{\theta}{2}.$$

On peut remarquer que si, dans une série d'expériences, la masse du projectile et la hauteur de tir $a$ sont les mêmes, les vitesses

des projectiles seront proportionnelles à $\sin\frac{\theta}{2}$.

Pratiquement, dans l'intérêt de la conservation de l'instrument, on choisit $a$ de manière que l'axe O ne subisse aucune percussion. Or, si O est le milieu de l'axe ~~par~~ cet axe est axe principal d'inertie relatif à O, à cause de la symétrie de construction de l'appareil - D'autre part, le projectile est lancé perpendiculairement au plan de l'axe et du centre de gravité, et dans le plan médian du récepteur (plan perpendiculaire à l'axe en O.) Il suffit donc de faire :

$$al = K^2$$ pour réaliser toutes les conditions.

On voit que $a$ est alors la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé que constitue le récepteur (avant le choc)

En particularisant ainsi les données du problème, la formule se simplifie :

$$v_0 = \frac{2}{mK}(Ml^2+mK^2)\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Nous indiquerons en terminant quelques exercices où le principe de Carnot trouve son application.



**Problème** : On donne 2 poulies mobiles autour d'axes parallèles, et animées respectivement de vitesses angulaires données $\omega_0$, $\omega'_0$.

Un fil enroulé sur ces 2 poulies se tend à un certain instant et reste tendu. Calculer les vitesses angulaires $\omega_1$, $\omega'_1$ après le choc.

On se trouve dans les conditions du principe de Carnot, qui fournit une équation pour déterminer $\omega_1$ et $\omega'_1$. On a d'ailleurs en

vertu de la liaison persistante, la relation géométrique suivante entre ces 2 vitesses: $r\omega_1 = r'\omega'$.

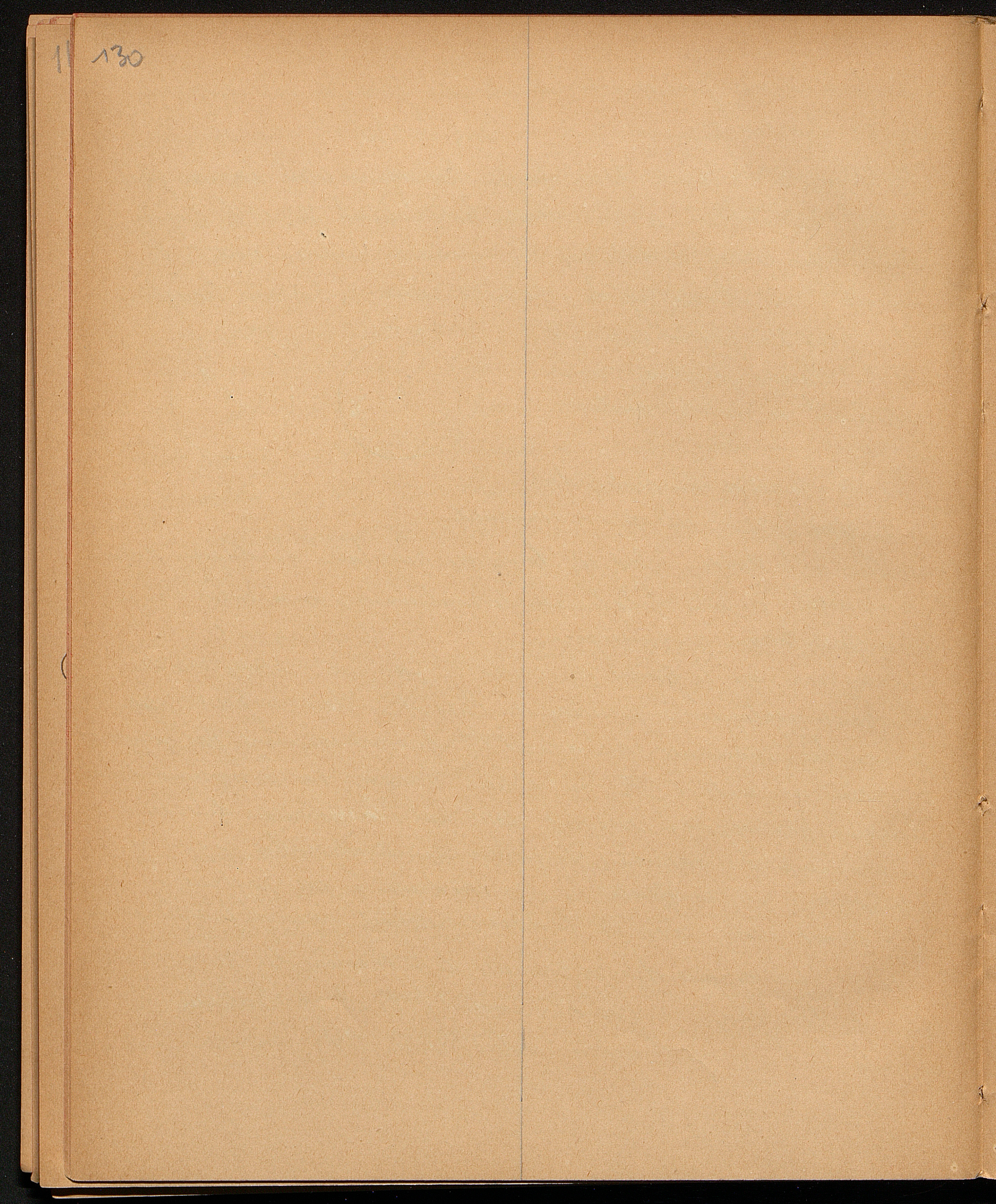
Problème : Le centre d'un disque homogène situé dans un plan vertical est animé d'une vitesse horizontale $v_0$, et le disque possède une vitesse de rotation $\omega_0$ autour de son centre. Il rencontre une droite rigide faisant avec l'horizon l'angle $\alpha$; et il ne peut pas glisser sur cette droite. Trouver la vitesse avec laquelle il se met à rouler sur elle.

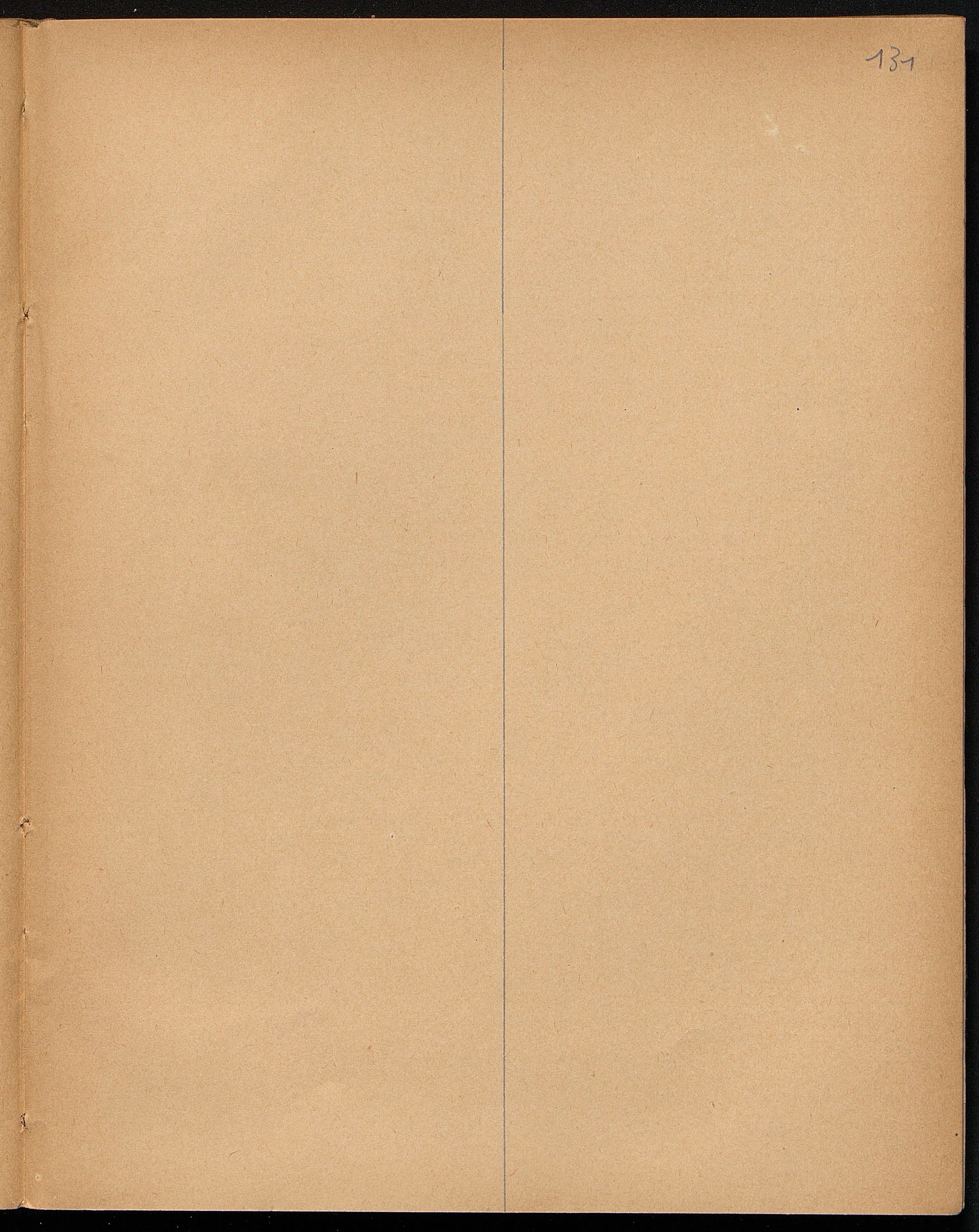
Soit $v_1$ la vitesse du centre du disque après le choc; elle est évidemment parallèle à la droite; soit $\omega_1$ la vitesse angulaire du disque autour de son centre; en vertu de la liaison de roulement, on a entre ces 2 vitesses la relation géométrique: $v_1 + r\omega_1 = 0$

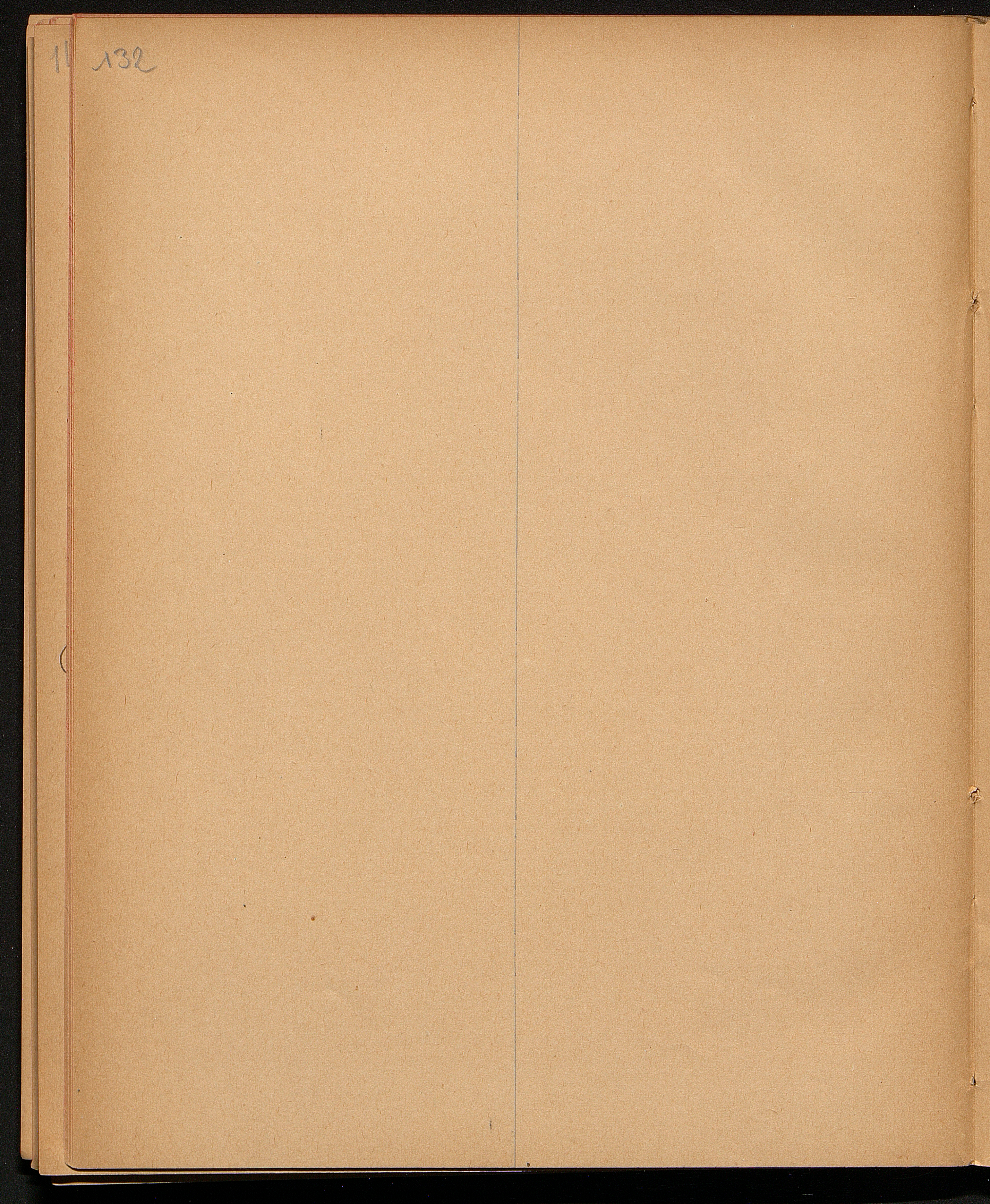
qui exprime que le point de contact a une vitesse nulle.

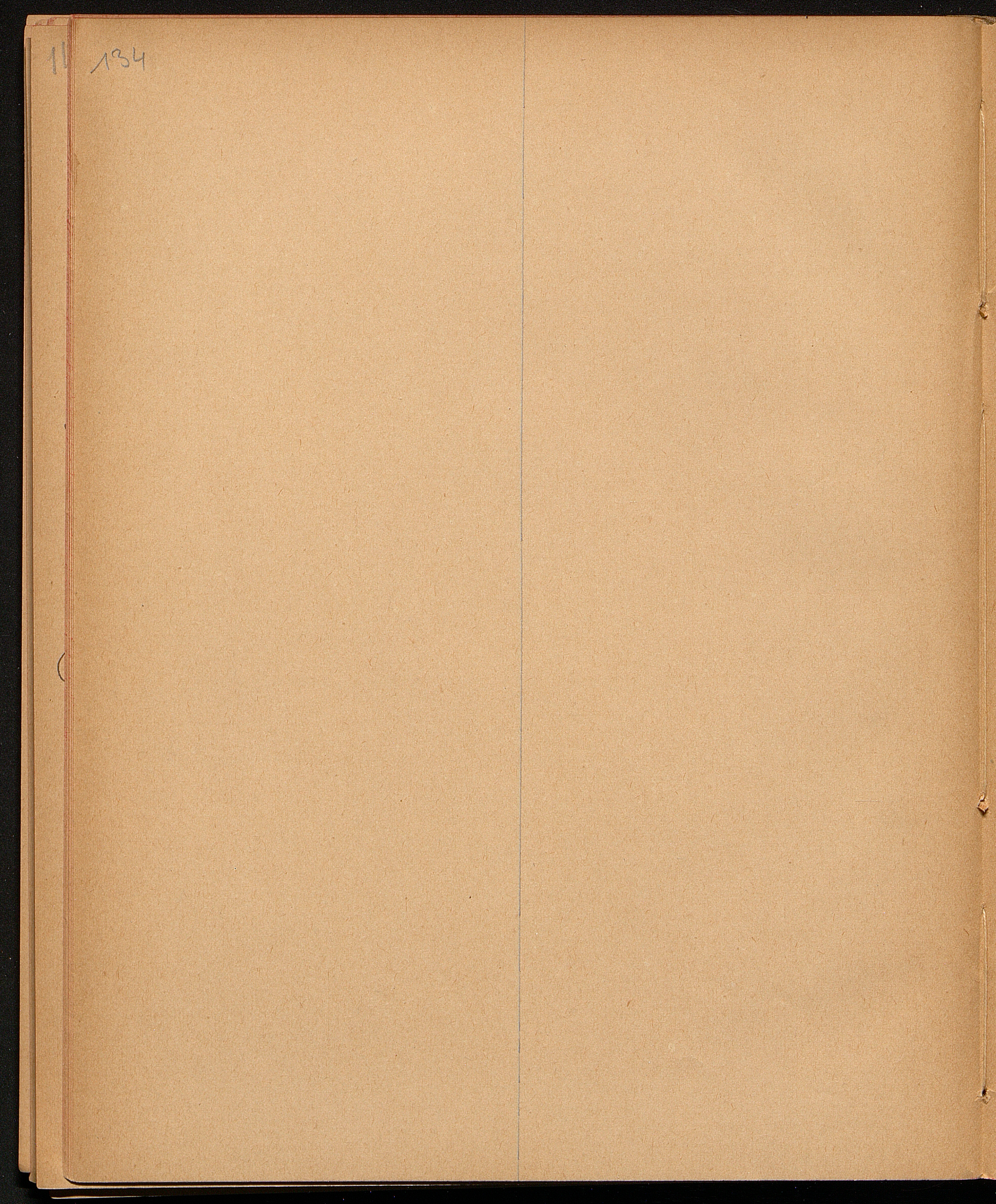
On peut appliquer le principe de Carnot. Mais on peut aussi prendre les moments des quantités de mouvement par rapport au point de contact A où a lieu le choc, car le moment de la percussion par rapport à ce point étant nul, la variation de la somme des moments des quantités de mouvement est nulle, c.à.d. que cette somme est constante. On étudiera le cas particulier où $v_1$ serait nulle c.à.d. où le disque resterait immobile après le choc.

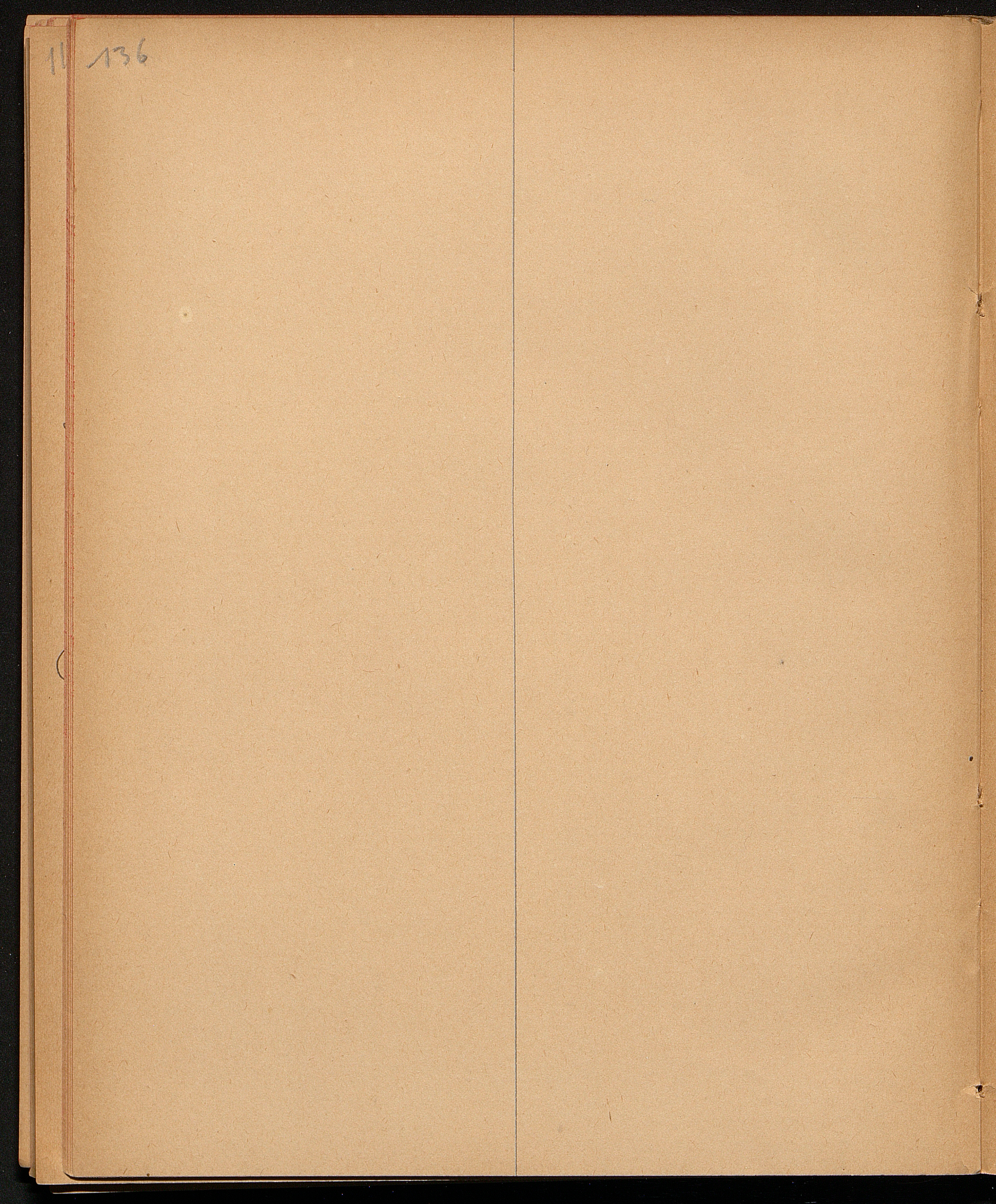
Pour plus amples développements de la théorie des percussions, cf: Mr Darboux, ap. Comptes rendus (1874) et Bulletin..... et: M. Robin, ap. Comptes rendus (tome CV.)

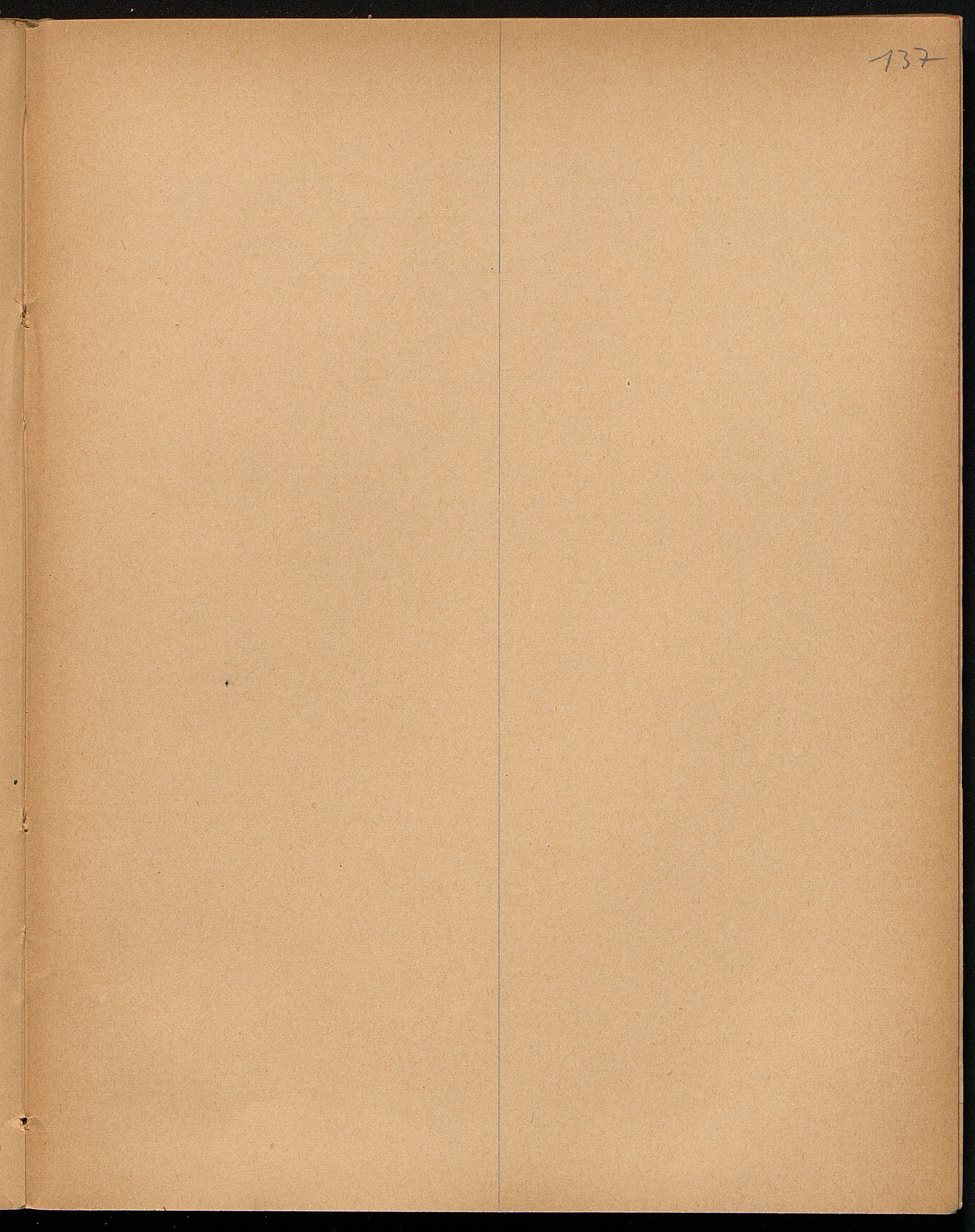

130

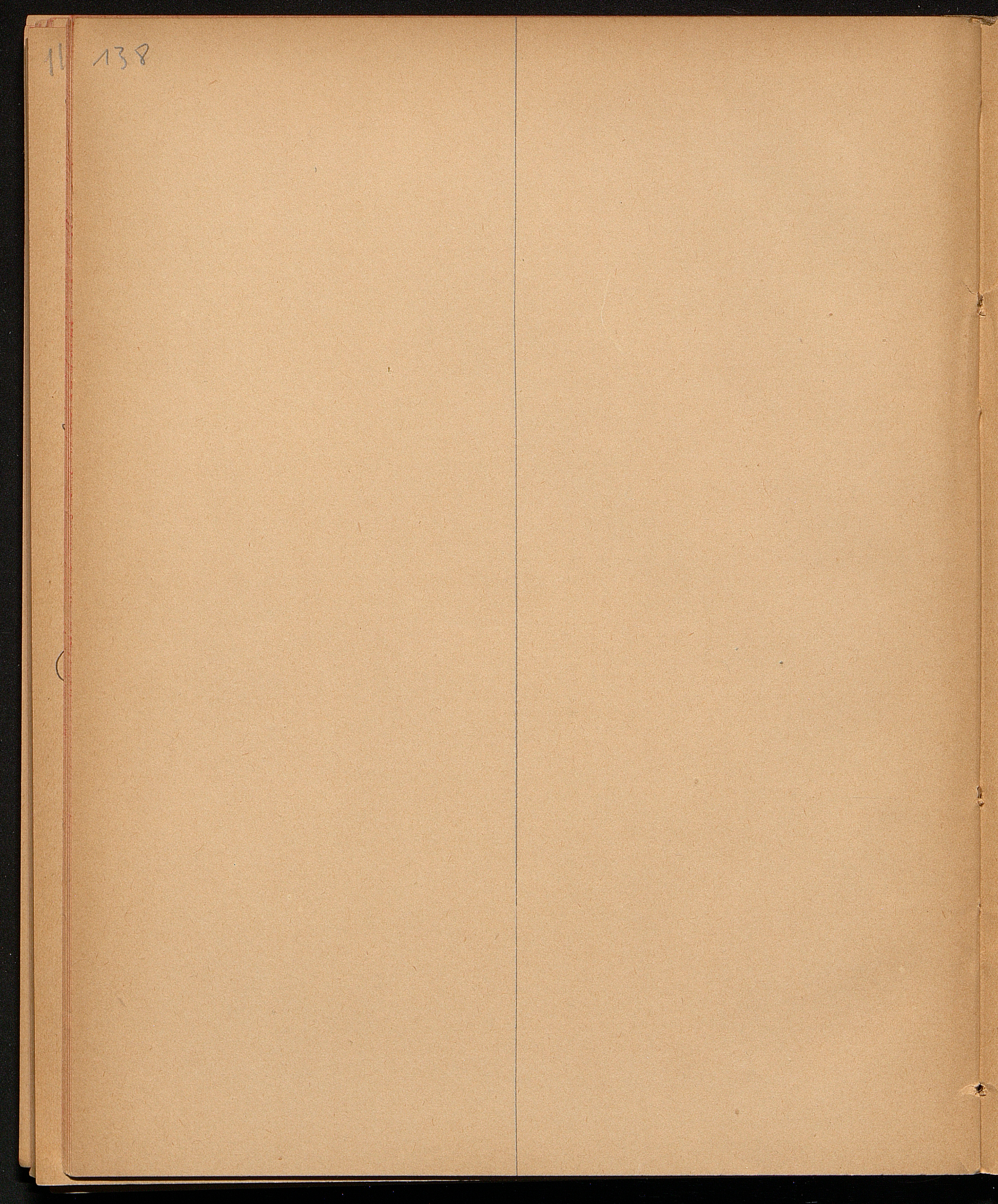


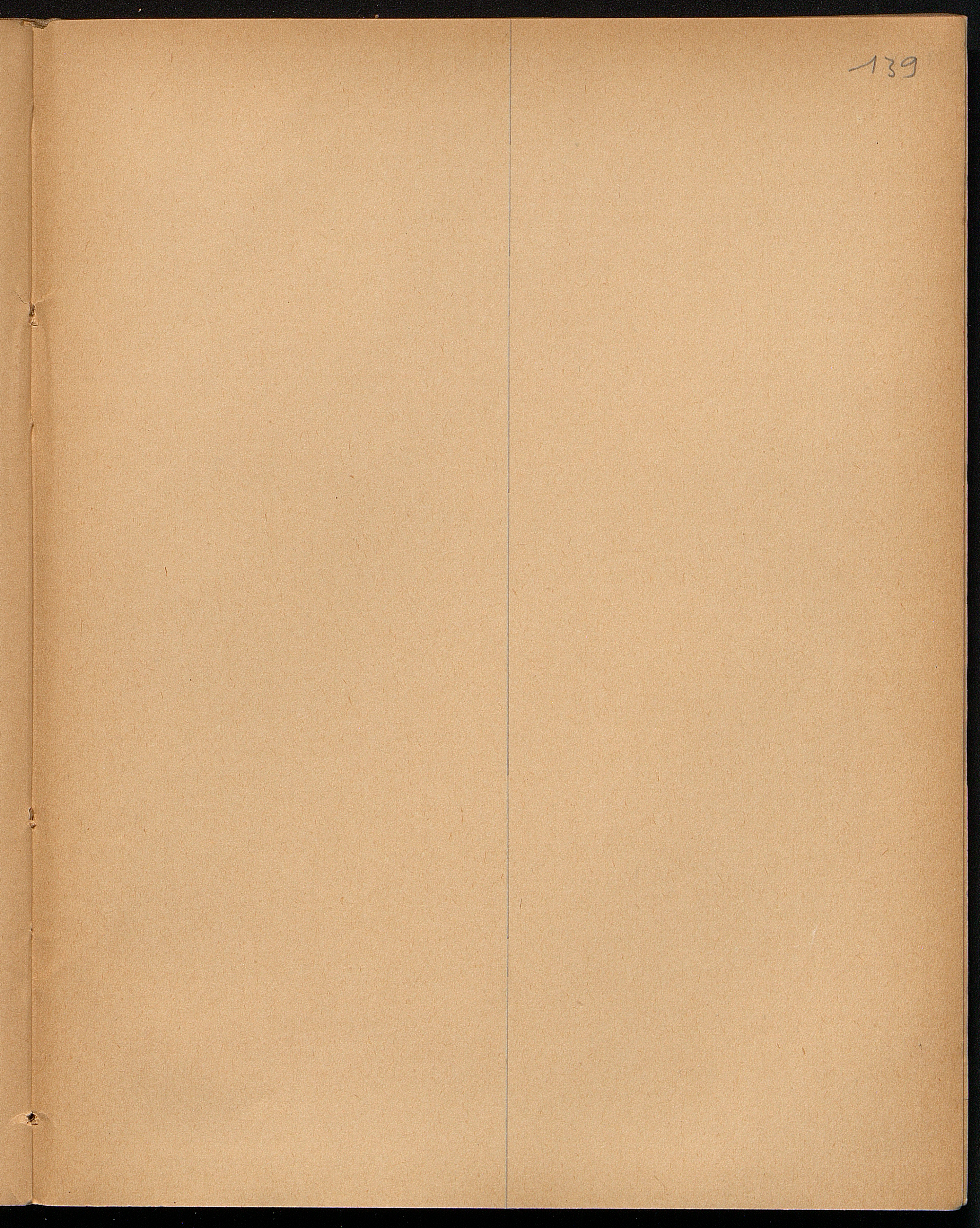

132



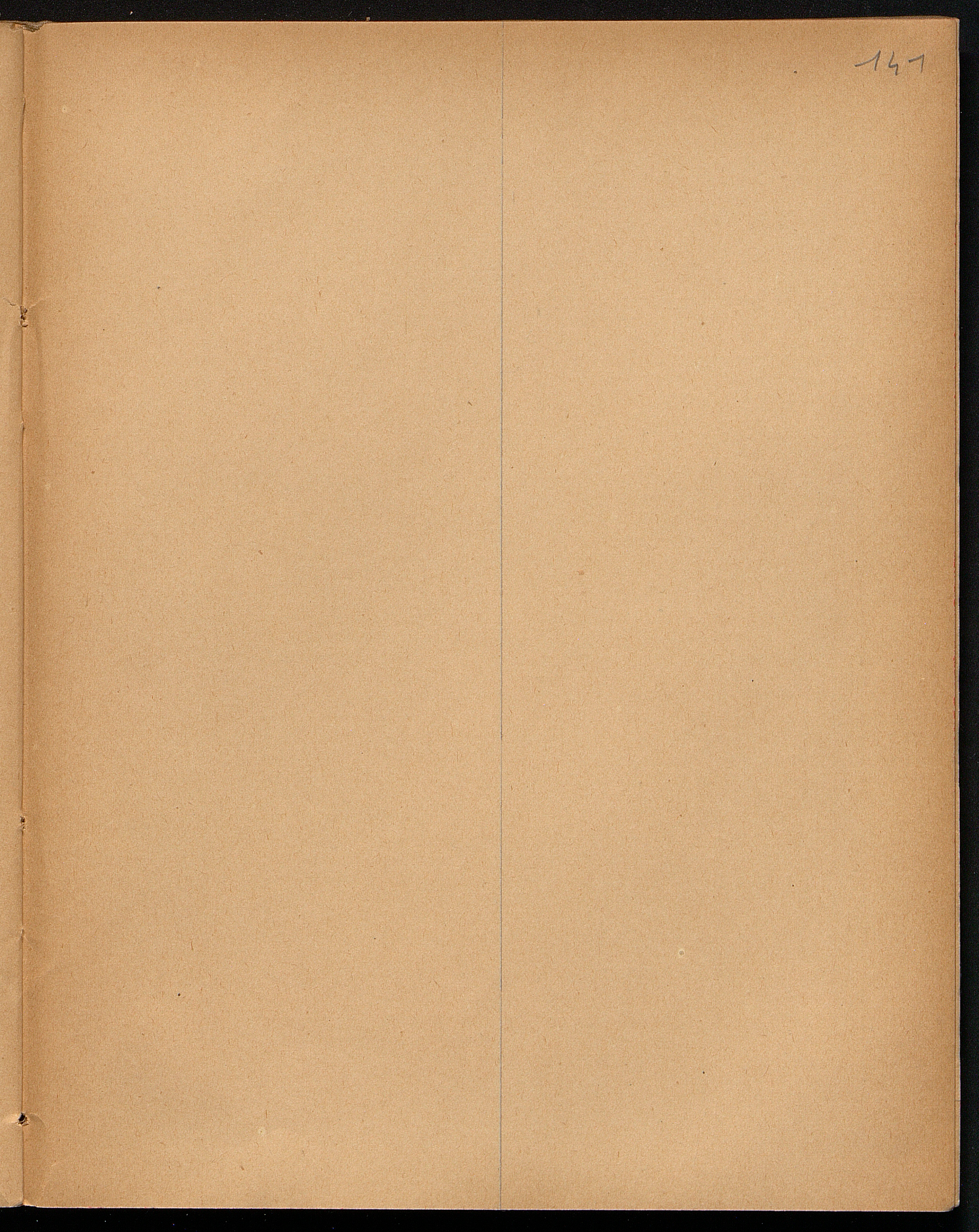


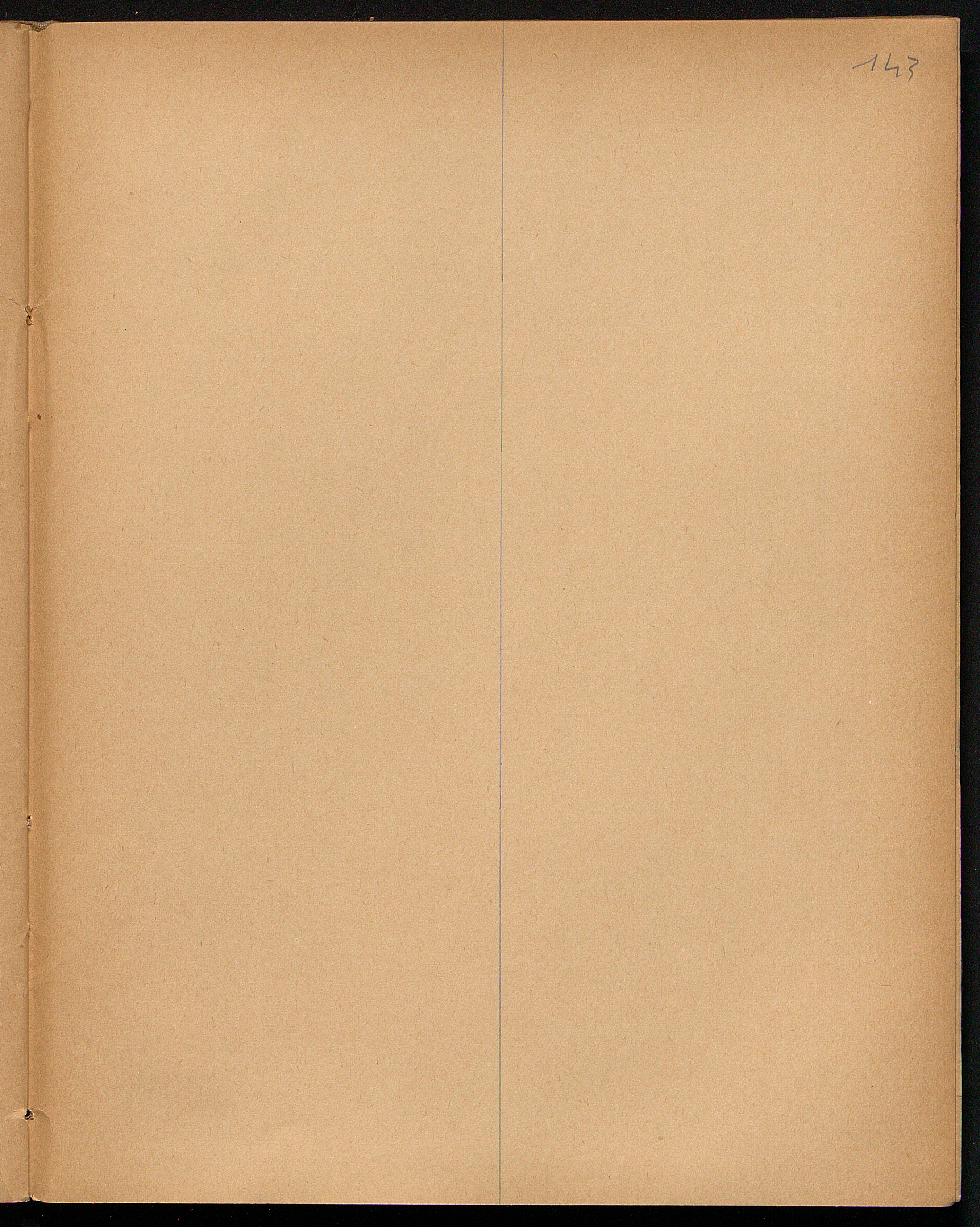

137

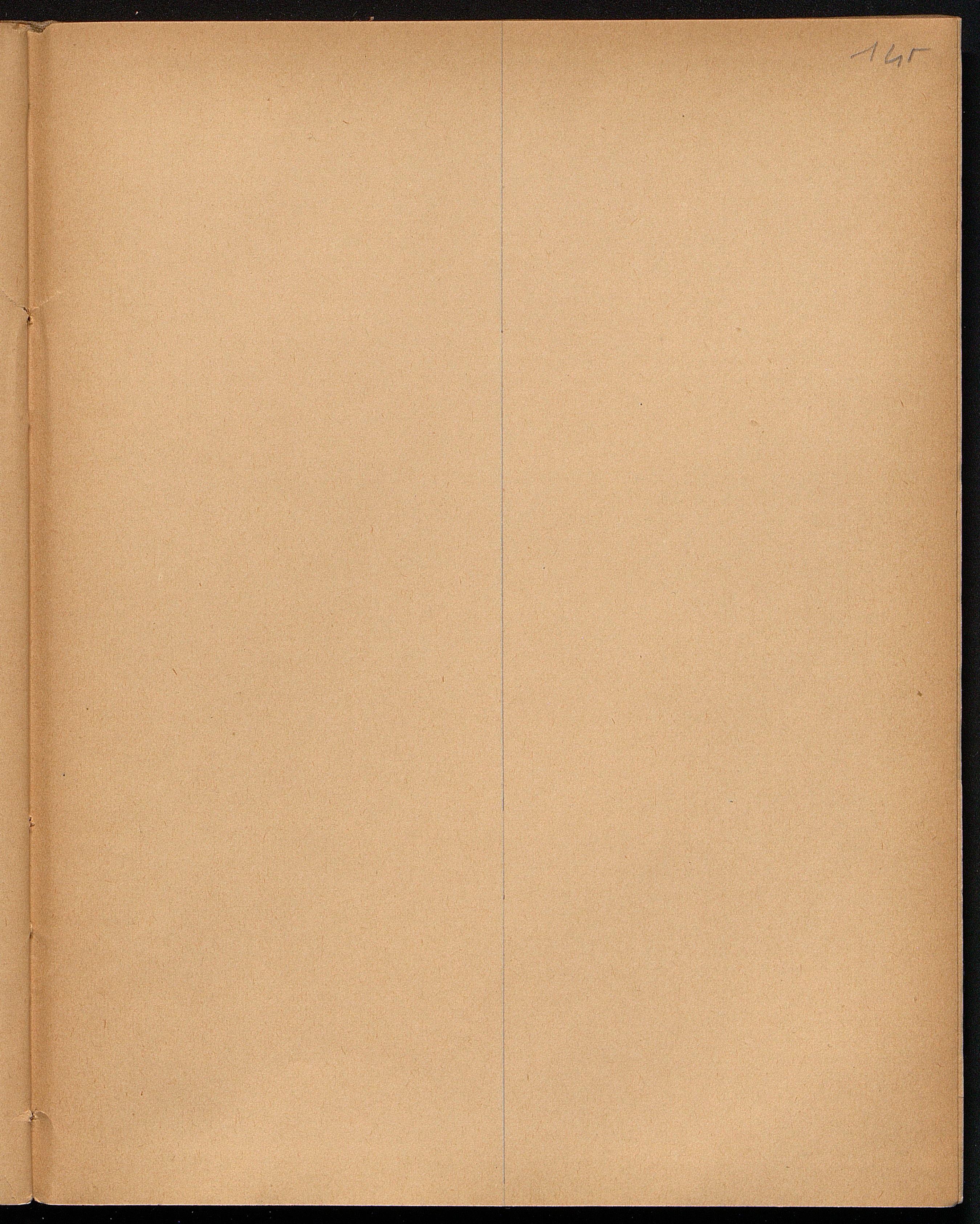


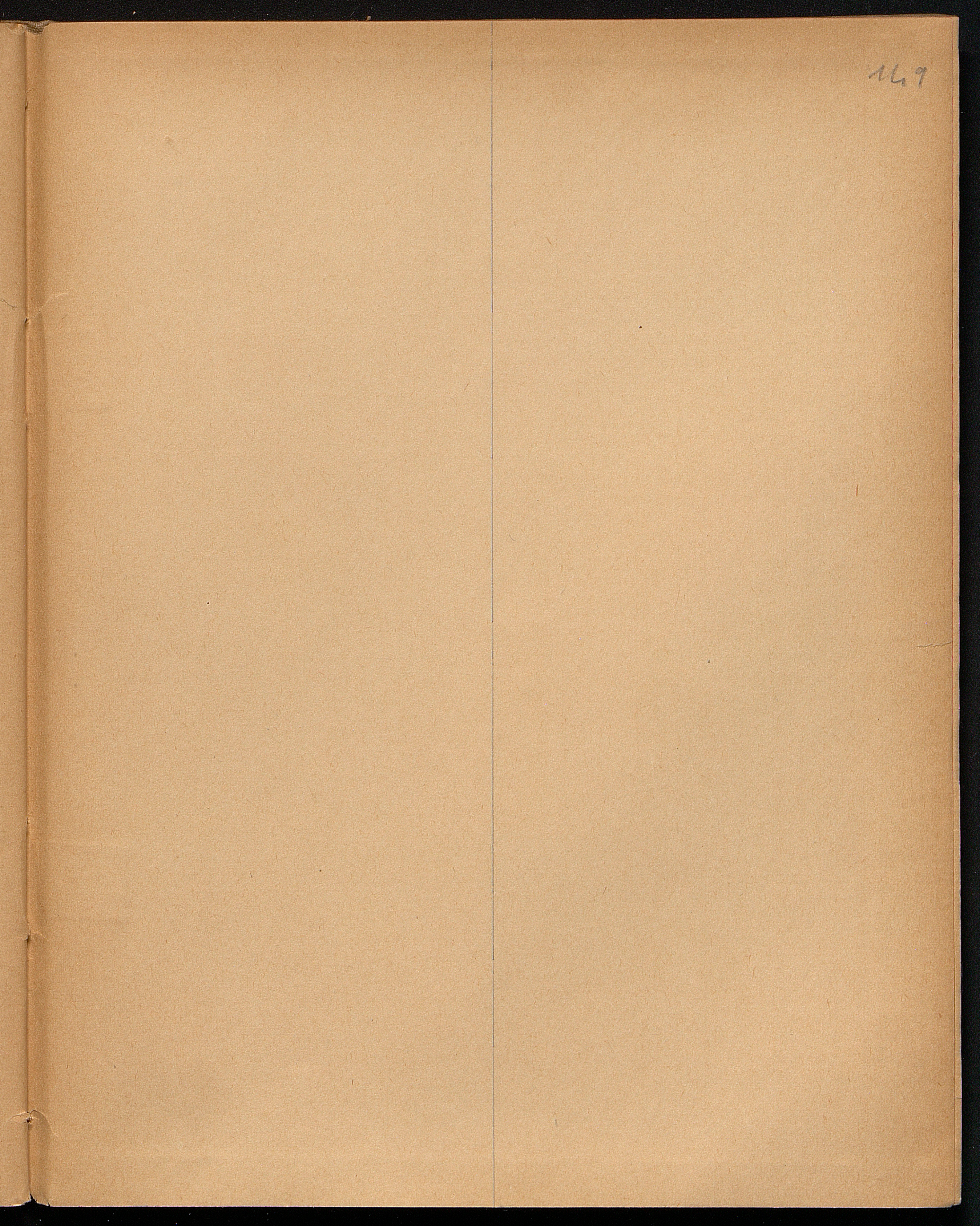

139

140




143


145


149

